ACCQ205
Contrôle de connaissances — Corrigé

Courbes algébriques

14 avril 2021

Consignes.

Ce contrôle est formé d'un unique problème. Les questions dépendent les unes des autres, mais elles ont été formulées de manière à ce que le fait de ne pas savoir répondre à l'une d'elles ne bloque pas toute la suite (tout ce qu'il faut savoir pour la suite est toujours explicité par l'énoncé).

La difficulté des questions étant varié, il vaut mieux ne pas rester bloqué trop longtemps.

Si on ne sait pas répondre rigoureusement, une réponse informelle peut valoir une partie des points.

L'usage de tous les documents (notes de cours manuscrites ou imprimées, feuilles d'exercices, livres) est autorisé.

L'usage des appareils électroniques est interdit.

Durée : 2h

Ce corrigé comporte 9 pages (page de garde incluse).

Git : 38c45c8 Wed Jun 30 17:23:53 2021 +0200

Soit k un corps de caractéristique $\neq 2$ (c'est-à-dire qu'on pourra librement diviser par 2), dont on notera k^{alg} la clôture algébrique. On rappelle qu'un « point géométrique » de $\mathbb{P}^n$ désigne un point à coordonnées dans k^{alg}, tandis qu'un « point rationnel » désigne un point à coordonnées dans k.

(1) Montrer le fait suivant (théorème d'Euler sur les polynômes homogènes) : si h est un polynôme homogène de degré ℓ en les variables $t_0, \ldots, t_n$ alors $\sum_{j=0}^{n} t_j \frac{\partial h}{\partial t_j} = \ell h$ (égalité dans $k[t_0, \ldots, t_n]$). Pour cela, on pourra justifier qu'il suffit de le prouver lorsque h est un monôme.

Corrigé. La formule énoncée étant linéaire, il suffit de la démontrer lorsque h est un monôme de degré total ℓ (un polynôme homogène de degré ℓ étant combinaison linéaire de tels monômes). Or si $h = t_0^{d_0} \cdots t_n^{d_n}$ avec $d_0 + \cdots + d_n = \ell$, on a $\frac{\partial h}{\partial t_j} = d_j\, t_0^{d_0} \cdots t_j^{d_j - 1} \cdots t_n^{d_n}$ d'où $t_j \frac{\partial h}{\partial t_j} = d_j\, t_0^{d_0} \cdots t_j^{d_j} \cdots t_n^{d_n} = d_j\, h$ et $\sum_{j=0}^{n} t_j \frac{\partial h}{\partial t_j} = (\sum_{j=0}^{n} d_j)\, h = \ell h$. ✓

Faisons la remarque introductive suivante (qui est une reformulation projective du résultat bien connu sur les racines d'un polynôme de degré 2 sur la droite affine, et qu'on pourra librement utiliser dans la suite) : si $q := c_0 x^2 + c_1 xy + c_2 y^2$ est un polynôme homogène de degré 2 non nul en deux variables x, y, alors le fermé de Zariski $\{q = 0\}$ qu'il définit dans la droite projective $\mathbb{P}^1$ est constitué d'exactement *un ou deux* points géométriques ; il y en a un seul si et seulement si le discriminant $\Delta := c_1^2 - 4c_0c_2$ est nul, auquel cas le point $(x : y)$ en question est $(c_1 : -2c_0) = (-2c_2 : c_1)$ (il est donc rationnel) ; et lorsque $\Delta \neq 0$, *soit* les deux points géométriques sont tous les deux rationnels, *soit* aucun des deux ne l'est [1].

On va désormais s'intéresser à la courbe définie par une équation homogène de degré 2 dans le plan projectif.

Plus précisément, on appelle **conique** plane sur k une variété algébrique projective (i.e., un fermé de Zariski) C_q dans $\mathbb{P}^2$ définie par une équation $q = 0$ où $q \in k[x, y, z]$ est un polynôme homogène de degré 2 (on dit aussi « forme quadratique ») non nul [2] en trois variables x, y, z qu'on identifie aux coordonnées homogènes sur $\mathbb{P}^2$. À titre d'exemple, $\{x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$ est une telle conique.

En général, une conique s'écrit $\{q = 0\}$ où

$$q = a_x\, x^2 + a_y\, y^2 + a_z\, z^2 + b_x\, yz + b_y\, xz + b_z\, xy$$

1. Ceci résulte de la formule du trinôme : les deux points sont $(c_1 \pm \sqrt{\Delta} : -2c_0) = (-2c_2 : c_1 \mp \sqrt{\Delta})$, ils sont rationnels si et seulement si Δ est un carré dans k, mais cette formule ne servira pas ici.

2. On pourra aussi librement faire l'hypothèse que q n'est pas le carré d'un polynôme l (forcément homogène) de degré 1 (= forme linéaire) ; en effet, s'il l'est, la conique $\{q = 0\}$ est simplement réduite à la droite $\{l = 0\}$ mais l'idéal (q) n'est pas radical (il faut imaginer la conique comme la droite « doublée ») : on ignorera donc ce cas.

avec $a_x, a_y, a_z, b_x, b_y, b_z$ six coefficients dans k, non tous nuls : on adoptera cette notation.

(2) On rappelle qu'un point $(x_0 : y_0 : z_0)$ de C_q est dit *singulier* lorsque $\frac{\partial q}{\partial x}$, $\frac{\partial q}{\partial y}$ et $\frac{\partial q}{\partial z}$ s'annulent simultanément en (x_0, y_0, z_0). Expliquer pourquoi un point vérifiant ces conditions est automatiquement sur C_q (i.e., pourquoi l'annulation de $\frac{\partial q}{\partial x}$, $\frac{\partial q}{\partial y}$ et $\frac{\partial q}{\partial z}$ en (x_0, y_0, z_0) quelconque implique automatiquement celle de q). Donner une condition pour que trois droites dans $\mathbb{P}^2$ soient concourantes (condition sur les coefficients de leurs équations). En déduire que la conique C_q a un point singulier si et seulement si ses coefficients vérifient

$$4a_x a_y a_z - a_x b_x^2 - a_y b_y^2 - a_z b_z^2 + b_x b_y b_z = 0$$

et qu'il revient au même de dire qu'elle a un point singulier géométrique ou rationnel.

Corrigé. On a vu en (1) que $q = \frac{1}{2}(x\,\frac{\partial q}{\partial x} + y\frac{\partial q}{\partial y} + z\,\frac{\partial q}{\partial z})$. Donc en un point $(x_0 : y_0 : z_0)$ où $\frac{\partial q}{\partial x}$, $\frac{\partial q}{\partial y}$ et $\frac{\partial q}{\partial z}$ s'annulent, q s'annule aussi, et le point est sur C_q.

Trois droites $\{ux+vy+wz = 0\}$, $\{u'x+v'y+w'z = 0\}$ et $\{u''x+v''y+w''z = 0\}$ dans $\mathbb{P}^2$ concourent si et seulement si le déterminant

$$\begin{vmatrix} u & v & w \\ u' & v' & w' \\ u'' & v'' & w'' \end{vmatrix}$$

s'annule (en effet, il exprime le fait que la matrice dont il est le déterminant a un noyau non trivial, ce qui revient exactement à demander l'existence d'un point situé sur les trois droites à la fois).

Or chacune des conditions $\frac{\partial q}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial q}{\partial y} = 0$ et $\frac{\partial q}{\partial z} = 0$ définit une droite dans $\mathbb{P}^2$, à savoir $\{2a_x\,x + b_z\,y + b_y\,z = 0\}$, $\{b_z\,x + 2a_y\,y + b_x\,z = 0\}$ et $\{b_y\,x + b_x\,y + 2a_z\,z = 0\}$, donc l'existence d'un point singulier sur C_q se traduit par l'annulation du déterminant

$$\begin{vmatrix} 2a_x & b_z & b_y \\ b_z & 2a_y & b_x \\ b_y & b_x & 2a_z \end{vmatrix}$$

qui (une fois développé ce déterminant, et divisé par 2) est exactement la condition proposée par l'énoncé.

L'affirmation sur la rationalité vient du fait qu'un système d'équations linéaires à coefficients dans k^{alg} (en l'occurrence le système formé de $\frac{\partial q}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial q}{\partial y} = 0$ et $\frac{\partial q}{\partial z} = 0$) a automatiquement une solution dans k (l'ensemble des solutions sur K étant un sous-k-espace vectoriel de K^3, et la dimension d'un espace vectoriel ne dépendant pas du corps sur lequel on la calcule). ✓

On supposera maintenant, et jusqu'à la fin, que la conique est C_q *lisse*, c'est-à-dire vérifie $4a_xa_ya_z - a_xb_x^2 - a_yb_y^2 - a_zb_z^2 + b_xb_yb_z \neq 0$ (cf. question (2)).

(3) Sur k^{alg} (« géométriquement »), montrer que C_q ne contient aucune droite (i.e., montrer qu'il n'existe pas $l \in k^{\mathrm{alg}}[x, y, z]$ homogène de degré 1 tel que tous les points géométriques de la droite $\{l = 0\}$ soient dans C_q ; indication : si elle en contenait une alors on pourrait factoriser q sous la forme ll', contredisant l'hypothèse qu'on vient de faire). En déduire que C_q ne peut jamais contenir trois points alignés distincts.

Corrigé. Si C_q contenait une droite $\{l = 0\}$ avec l un polynôme l homogène de degré 1 (= forme linéaire) à coefficients dans k^{alg}, cela signifierait $q \in \mathfrak{I}(Z(l))$ (i.e., « q s'annule partout où l s'annule »), donc q appartiendrait à l'idéal homogène (manifestement radical) engendré par l, donc q s'écrirait sous la forme ll', avec l' homogène de degré 1, i.e., la conique serait (géométriquement) réductible en une réunion de deux droites. Or, dans cette condition, si P est situé à l'intersection des droites $\{l = 0\}$ et $\{l' = 0\}$, alors $\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial (ll')}{\partial x} = l\frac{\partial l'}{\partial x} + l'\frac{\partial l}{\partial x}$ s'annule en P, et de même par rapport aux deux autres variables y, z. Le point P serait donc singulier, contredisant l'hypothèse de lissité sur C_q.

La remarque introductive assure que si une conique coupe une droite en trois points distincts, elle contient la droite tout entière, et on vient de voir que ce n'est pas possible pour une conique lisse. Une conique lisse ne contient donc jamais trois points alignés. ✓

Dans les questions qui suivent, on va s'intéresser à une application qui à un point de $\mathbb{P}^2$ associe une droite de $\mathbb{P}^2$ dite « polarité » par rapport à la conique.

Plus précisément, on appelle **droite polaire**, relativement à C_q (ou à q) d'un point $P_0 := (x_0 : y_0 : z_0)$ de $\mathbb{P}^2$ (non nécessairement situé sur C_q) la droite $\{u_0x + v_0y + w_0z = 0\}$ dont les coefficients u_0, v_0, w_0 sont donnés par $\frac{\partial q}{\partial x}$, $\frac{\partial q}{\partial y}$ et $\frac{\partial q}{\partial z}$ respectivement, évalués en (x_0, y_0, z_0).

(4) Pourquoi cette définition a-t-elle un sens ? (Autrement dit, pourquoi u_0, v_0, w_0 ne s'annulent-ils pas simultanément, et pourquoi la droite ne dépend-elle pas du choix des coordonnées homogènes (x_0, y_0, z_0) de P_0 ?) Montrer que, si P_0 et P_1 sont deux points de $\mathbb{P}^2$, alors :

P_1 est sur la droite polaire de P_0 si et seulement si P_0 est sur la droite polaire de P_1

(« principe de réciprocité de la polarité ») ; on pourra exprimer ce fait de comme une équation symétrique entre les coordonnées homogènes (x_0, y_0, z_0) de P_0 et celles (x_1, y_1, z_1) de P_1. Montrer que P_0 est sur C_q si et seulement si il est situé sur sa propre droite polaire.

Corrigé. Si $\frac{\partial q}{\partial x}$, $\frac{\partial q}{\partial y}$ et $\frac{\partial q}{\partial z}$ s'annulent simultanément, on a vu en (2) que $(x_0 : y_0 : z_0)$ est un point singulier de C_q, or on a fait l'hypothèse qu'il n'y en a pas. Par ailleurs, si on change les coordonnées homogènes du point $(x_0 : y_0 : z_0)$, cela revient à toutes les multiplier par une constante non nulle, mais comme $\frac{\partial q}{\partial x}$, $\frac{\partial q}{\partial y}$ et $\frac{\partial q}{\partial z}$ sont des polynômes homogènes (en fait, des formes linéaires...), cela multiplie chacun de u_0, v_0, w_0 par une constante non nulle, et cela ne change pas la droite $\{u_0x + v_0y + w_0z = 0\}$. La définition a donc bien un sens.

Dire que $P_1 := (x_1 : y_1 : z_1)$ est sur la droite polaire de $P_0 := (x_0 : y_0 : z_0)$ signifie que $2a_x\, x_0\, x_1 + 2a_y\, y_0\, y_1 + 2a_z\, z_0\, z_1 + b_x\, y_0\, z_1 + b_x\, z_0\, y_1 + b_y\, x_0\, z_1 + b_y\, z_0\, x_1 + b_z\, x_0\, y_1 + b_z\, y_0\, x_1 = 0$, ou, si on préfère,

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2a_x & b_z & b_y \\ b_z & 2a_y & b_x \\ b_y & b_x & 2a_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = 0$$

et cette condition est manifestement symétrique en P_0 et P_1.

Lorsque $P_1 = P_0$, la condition devient $2a_x\, x_0^2 + 2a_y\, y_0^2 + 2a_z\, z_0^2 + 2b_x\, y_0\, z_0 + 2b_y\, x_0\, z_0 + 2b_z\, x_0\, y_0 = 0$, ce qui équivaut bien à $q = 0$ en divisant par 2 (ou, si on préfère, on applique la question (1) pour la même conclusion). ✓

(5) Montrer que l'application envoyant un point de $\mathbb{P}^2$ sur sa droite polaire définit une bijection des points de $\mathbb{P}^2$ (géométriques ou rationnels) sur les droites de $\mathbb{P}^2$ (géométriques ou rationnelles) : pour cela, on pourra constater que l'application $(x_0, y_0, z_0) \mapsto (u_0, v_0, w_0)$ est k-linéaire. Expliquer pourquoi cette application envoie trois points alignés sur trois droites concourantes.

<u>*Corrigé.*</u> L'application

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2a_x & b_z & b_y \\ b_z & 2a_y & b_x \\ b_y & b_x & 2a_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

envoyant des coordonnées homogènes (x_0, y_0, z_0) d'un point sur les coefficients (u_0, v_0, w_0) (soit $(\frac{\partial q}{\partial x}, \frac{\partial q}{\partial y}, \frac{\partial q}{\partial z})$) définissant sa droite polaire, est linéaire, et elle est bijective car son déterminant est non nul, c'est justement l'hypothèse qu'on a faite. Elle induit donc une bijection entre points de $\mathbb{P}^2$ et droites de $\mathbb{P}^2$ (si (x_0, y_0, z_0) et (x_1, y_1, z_1) ont la même droite polaire, alors (u_0, v_0, w_0) et (u_1, v_1, w_1) sont proportionnelles, et quitte à multiplier par la bonne constante on peut les supposer égales, donc $(x_0 : y_0 : z_0) = (x_1 : y_1 : z_1)$). Par ailleurs, toujours parce qu'elle est linéaire, elle envoie trois points alignés sur trois droites concourantes (puisque l'alignement des points ou la concourance des droites s'exprime comme l'annulation du déterminant 3×3 de leurs coordonnées, et que les déterminants se multiplient). ✓

(6) Montrer que si P_0 est un point géométrique situé sur C_q, alors l'intersection de la droite polaire D_0 de P_0 avec C_q est réduite au seul point P_0. (S'il y avait un deuxième point, on pourra montrer qu'il aurait forcément la même droite polaire que P_0.) Expliquer pourquoi ce point P_0 est nécessairement rationnel si D_0 l'est.

<u>*Corrigé.*</u> Soit P_0 sur C_q et soit D_0 sa droite polaire. Supposons que D_0 passe par un autre point P_1 de C_q : alors le principe de réciprocité assure que sa droite polaire D_1 passe par P_0, mais aussi par P_1 puisque P_1 est sur C_q. Donc D_0 et D_1 passent toutes les deux par P_0 et P_1, et comme deux points distincts déterminent une droite, on a $D_0 = D_1$, donc $P_0 = P_1$ puisqu'on a établi que la fonction envoyant un point sur sa droite polaire est une bijection.

Pour expliquer pourquoi le point P_0 est rationnel si D_0 l'est, on peut soit se rappeler qu'on a défini une application k-linéaire bijective $(x_0, y_0, z_0) \mapsto (u_0, v_0, w_0)$ à la question précédente, ce qui montre que si u_0, v_0, w_0 sont dans k alors x_0, y_0, z_0 le sont, soit invoquer la remarque introductive (si une équation quadratique à coefficients dans k sur la droite projective a un seul point géométrique, celui-ci est rationnel). ✓

On appelle **tangente** à C_q en un point de C_q la droite polaire de ce point : on vient de voir qu'une droite tangente à C_q la rencontre en ce seul point.

(7) Montrer qu'une droite D de $\mathbb{P}^2$ est tangente à C_q si et seulement si elle la coupe en un seul point géométrique. On pourra pour cela expliquer pourquoi on peut supposer que le point est $(1{:}0{:}0)$ et la droite $\{z = 0\}$, et simplifier l'équation la conique dans ce cas.

<u>*Corrigé.*</u> On a vu dans la question précédente qu'une tangente à une conique coupe celle-ci en un seul point. On veut montrer, réciproquement, que si D est une droite coupant C_q en un seul point géométrique P, alors elle lui est tangente.

Or si P est un point de $\mathbb{P}^2$ et D une droite passant par P, quitte à choisir un point Q de D différent de P et à compléter P, Q en une base projective de $\mathbb{P}^2$, on peut trouver une transformation projective envoyant P sur $(1{:}0{:}0)$ et Q sur $(0{:}1{:}0)$ donc la droite D sur $\{z = 0\}$. Comme cette transformation projective est une simple application linéaire (inversible) sur les coordonnées homogènes et que la composition d'un polynôme homogène de degré 2 avec un tel changement de variables linéaire est encore un polynôme homogène de degré 2, elle transforme une conique en une conique. De plus, elle agit sur le vecteur des dérivées partielles de q comme la matrice qui la représente (notamment, une conique lisse est transformée en conique lisse).

Bref, on peut montrer le résultat en supposant $P = (1{:}0{:}0)$ et $D = \{z = 0\}$. L'intersection de C_q avec $\{z = 0\}$ est alors donnée, en identifiant avec $\mathbb{P}^1$ la droite $\{z = 0\}$ de $\mathbb{P}^2$, par $a_x\, x^2 + b_z\, xy + a_y\, y^2 = 0$. Le fait que P soit situé sur C_q se traduit par $a_x = 0$. Il reste donc simplement $b_z\, xy + a_y\, y^2 = 0$, soit $y(b_z\, x + a_y\, y) = 0$, qui définit la réunion du point $y = 0$, soit exactement $(1{:}0{:}0) = P$, et du point $b_z\, x + a_y\, y = 0$, soit $(a_y : -b_z : 0)$. Ce point coïncide avec P exactement quand $b_z = 0$, ce qui revient exactement à dire que $\frac{\partial q}{\partial y} = 0$

en $(1,0,0)$, et comme par ailleurs $\frac{\partial q}{\partial x} = 0$ en $(1,0,0)$ (vu que $a_x = 0$), cela revient bien à dire que la tangente à C_q en P est la droite $D = \{z = 0\}$. ✓

(8) Si P_0 est un point non situé sur C_q, montrer que les droites tangentes à C_q passant par P_0 sont exactement[3] les droites P_0M où M est un point d'intersection de C_q avec la droite polaire D de P_0. Expliquer pourquoi il en existe, géométriquement, exactement deux.

Corrigé. Soit D_0 la droite polaire de P_0. Comme on a supposé que P_0 n'est pas sur C_q, la droite D_0 n'est pas tangente à C_q (question (5)). Elle rencontre donc C_q en deux points géométriques distincts (question (7)), appelons-les P_1 et P_2. Soient D_1 et D_2 les tangentes à C_q par P_1 et P_2 respectivement, c'est-à-dire, les droites polaires de P_1 et P_2 respectivement. Elles sont distinctes l'une de l'autre par (5), et distinctes de D_0 car D_0 n'est pas tangente à C_q. Comme P_1 est sur D_0, par principe de réciprocité, P_0 est sur D_1 : donc D_1 coïncide avec la droite P_0P_1, et de même, D_2 coïncide avec la droite P_0P_2. Maintenant, s'il existait une autre tangente D à C_q passant par P_0, en appelant M le point de tangente, M serait sur D_0 puisque P_0 est sur D (principe de réciprocité), donc M serait situé à la fois sur C_q et D_0, or on a dit que les deux points géométriques situés à la fois sur C_q et D_0 sont P_0 et P_1. ✓

On appelle **triangle autopolaire** (relativement à C_q ou à q) la donnée de trois points P_0, P_1, P_2 distincts de $\mathbb{P}^2$ tels que la droite polaire de chacun soit la droite reliant les deux autres.

(9) Expliquer pourquoi on peut toujours trouver un triangle autopolaire de points rationnels. À quelle condition sur les coefficients de q le triangle $(1{:}0{:}0), (0{:}1{:}0), (0{:}0{:}1)$ est-il autopolaire ? En déduire que toute conique lisse s'écrit, après une transformation projective (à coefficients dans k), sous la forme $\{a_x\, x^2 + a_y\, y^2 + a_z\, z^2 = 0\}$ (on dit qu'elle est *diagonale*).

Corrigé. Soit P_0 un point rationnel de $\mathbb{P}^2$ *non* situé sur C_k (un tel point existe d'après la question (3)) ; il n'est donc pas situé sur sa droite polaire D_0. Soit P_1 un point rationnel de la droite polaire D_0 de P_0 également *non* situé sur C_k (même remarque) : il n'est donc pas situé sur sa droite polaire D_1, et par ailleurs il est distinct de P_0 (puisque situé sur D_0 alors que P_0 ne l'est pas) ; en revanche, P_0 est situé sur D_1 puisque P_1 est sur D_0 (principe de réciprocité). Soit enfin P_2 le point (rationnel) d'intersection des droites (rationnelles) D_0 et D_1 : cette intersection est bien définie car D_0 et D_1 sont distinctes (par (5)), et P_2 est distinct à la fois de P_0 (car situé sur D_0 tandis que P_0 ne l'est pas) et de P_1 (car situé sur D_1 tandis que P_1 ne l'est pas) ; sa droite polaire D_2 passe par P_0 et P_1 car D_0 et D_1 passent par P_2 (toujours par principe de réciprocité), donc on a bien un triangle autopolaire.

3. (Le sujet distribué comportait une faute de frappe dans cette phrase : au lieu de « point d'intersection de C_q avec la droite polaire » il était écrit « point d'intersection de P_0 avec la droite polaire ».)

Dire que la droite polaire de $(1{:}0{:}0)$ passe par $(0{:}1{:}0)$ signifie que $\frac{\partial q}{\partial y}$ s'annule en $(1{:}0{:}0)$, c'est-à-dire $b_z = 0$. Pour les autres points on trouve de même $b_x = 0$ et $b_y = 0$, et finalement le triangle $(1{:}0{:}0), (0{:}1{:}0), (0{:}0{:}1)$ est autopolaire si et seulement si $b_x = b_y = b_z = 0$: c'est-à-dire que la forme quadratique q est diagonale (égale à $a_x\, x^2 + a_y\, y^2 + a_z\, z^2$).

On a vu qu'on pouvait toujours trouver un triangle autopolaire. Comme on peut par ailleurs (quitte à compléter n'importe comment en une base projective) trouver une transformation projective l'envoyant sur $(1{:}0{:}0), (0{:}1{:}0), (0{:}0{:}1)$, ceci met la conique sous forme diagonale comme demandé. ✓

(10) Montrer le résultat suivant : si A_0, A_1, A_2, A_3 sont quatre points distincts situés sur la conique C_q, et si on pose $P_0 = A_0A_3 \wedge A_1A_2$ (c'est-à-dire : l'intersection de la droite reliant A_0 et A_3 et de celle reliant A_1 et A_2) et $P_1 = A_1A_3 \wedge A_0A_2$ et $P_2 = A_2A_3 \wedge A_0A_1$, alors le triangle P_0, P_1, P_2 est autopolaire. Pour cela, on pourra expliquer pourquoi on peut supposer que A_0, A_1, A_2, A_3 sont $(1{:}0{:}0), (0{:}1{:}0), (0{:}0{:}1), (1{:}1{:}1)$ respectivement et calculer à la fois les coordonnées de P_0, P_1, P_2 et des conditions sur les coefficients de q. En déduire une construction, à la règle seule. dans le plan projectif réel, de la droite polaire d'un point par rapport à une conique donnée (en supposant qu'elle a effectivement des points réels).

Corrigé. D'après la question (3), trois quelconques parmi les points A_0, A_1, A_2, A_3 ne sont pas alignés. Ils forment donc une base projective du plan. Quitte à appliquer une transformation projective, on peut supposer que ce sont $(1{:}0{:}0), (0{:}1{:}0), (0{:}0{:}1), (1{:}1{:}1)$. On calcule alors $P_0 = (0{:}1{:}1)$ et $P_1 = (1{:}0{:}1)$ et $P_2 = (1{:}1{:}0)$. Par ailleurs, le fait que $(1{:}0{:}0), (0{:}1{:}0), (0{:}0{:}1), (1{:}1{:}1)$ appartiennent à C_q impose les conditions $a_x = a_y = a_z = b_x + b_y + b_z = 0$: les dérivées partielles de q sont alors $\frac{\partial q}{\partial x} = b_z\, y + b_y\, z$ et $\frac{\partial q}{\partial y} = b_x\, z + b_z\, x$ et $\frac{\partial q}{\partial z} = b_y\, x + b_x\, y$. La droite polaire de $P_0 = (0{:}1{:}1)$ est alors donnée par $-b_x x + b_x y + b_x z = 0$, autant dire $-x + y + z = 0$, qui est bien la droite P_1P_2, et le calcul est le même pour les deux autres points (après permutation cyclique des coordonnées).

On en déduit la construction suivante de la droite polaire d'un point P_0 (par rapport à une conique réelle ayant effectivement des points réels) : tracer deux droites passant par P_0 et coupant la conique en deux points réels chacune, appeler A_0, A_3 les points de la conique sur l'une d'entre elles, et A_1, A_2 ceux sur l'autre ; alors en appelant $P_1 = A_1A_3 \wedge A_0A_2$ et $P_2 = A_2A_3 \wedge A_0A_1$, la droite polaire de P_0 est la droite P_1P_2 (c'est-à-dire $(A_1A_3 \wedge A_0A_2) \vee (A_2A_3 \wedge A_0A_1)$).

(Bien sûr, si on se permet de tracer des tangentes à la conique passant par P_0, on peut faire plus simple : appeler P_1, P_2 les deux points de tangence aux deux tangentes à C_q par P_0, et alors la polaire D_0 de P_0 est la droite les reliant, comme prouvé en (8). Mais attention, ces points ne sont pas forcément réels : imaginer le cas où P_0 est intérieur à un cercle.) ✓

(11) Énumérer les points rationnels $(x : y : z)$ de la conique $\{x^2+y^2+z^2 = 0\}$ dans $\mathbb{P}^2$ sur le corps fini $\mathbb{F}_3$ à trois éléments. Combien y en a-t-il ?

Corrigé. Il est facile d'énumérer toutes les possibilités en se rappelant que les seuls carrés dans $\mathbb{F}_3$ sont 0 et 1 : la seule possibilité pour en avoir trois qui somment à 0 est $1 + 1 + 1 = 0$ (vu que $0 + 0 + 0 = 0$ ne donnera pas un point de l'espace projectif). Les points de la conique sont alors $(1{:}1{:}1), (1{:}1{:}2), (1{:}2{:}1), (1{:}2{:}2)$ (on se rappelle que les points sont définis à multiplication près par une constante, donc $(2{:}1{:}1)$, par exemple, coïncide avec $(1{:}2{:}2)$). Il y en a quatre.

(En fait, on peut utiliser un paramétrage rationnel pour montrer que toute conique projective lisse sur un corps k de caractéristique $\neq 2$ est isomorphe à $\mathbb{P}^1$ dès qu'elle a un point rationnel ; cette dernière hypothèse est toujours vérifiée sur un corps fini $\mathbb{F}_q$, donc elle a toujours $q + 1$ points rationnels.) ✓