ACCQ205
Contrôle de connaissances

Courbes algébriques

14 avril 2021

Consignes.

Ce contrôle est formé d'un unique problème. Les questions dépendent les unes des autres, mais elles ont été formulées de manière à ce que le fait de ne pas savoir répondre à l'une d'elles ne bloque pas toute la suite (tout ce qu'il faut savoir pour la suite est toujours explicité par l'énoncé).

La difficulté des questions étant varié, il vaut mieux ne pas rester bloqué trop longtemps.

Si on ne sait pas répondre rigoureusement, une réponse informelle peut valoir une partie des points.

L'usage de tous les documents (notes de cours manuscrites ou imprimées, feuilles d'exercices, livres) est autorisé.

L'usage des appareils électroniques est interdit.

Durée : 2h

Cet énoncé comporte 4 pages (page de garde incluse).

Git : 38c45c8 Wed Jun 30 17:23:53 2021 +0200

Soit k un corps de caractéristique $\neq 2$ (c'est-à-dire qu'on pourra librement diviser par 2), dont on notera k^{alg} la clôture algébrique. On rappelle qu'un « point géométrique » de $\mathbb{P}^n$ désigne un point à coordonnées dans k^{alg}, tandis qu'un « point rationnel » désigne un point à coordonnées dans k.

(1) Montrer le fait suivant (théorème d'Euler sur les polynômes homogènes) : si h est un polynôme homogène de degré ℓ en les variables $t_0, \ldots, t_n$ alors $\sum_{j=0}^{n} t_j \frac{\partial h}{\partial t_j} = \ell h$ (égalité dans $k[t_0, \ldots, t_n]$). Pour cela, on pourra justifier qu'il suffit de le prouver lorsque h est un monôme.

Faisons la remarque introductive suivante (qui est une reformulation projective du résultat bien connu sur les racines d'un polynôme de degré 2 sur la droite affine, et qu'on pourra librement utiliser dans la suite) : si $q := c_0 x^2 + c_1 xy + c_2 y^2$ est un polynôme homogène de degré 2 non nul en deux variables x, y, alors le fermé de Zariski $\{q = 0\}$ qu'il définit dans la droite projective $\mathbb{P}^1$ est constitué d'exactement *un ou deux* points géométriques ; il y en a un seul si et seulement si le discriminant $\Delta := c_1^2 - 4c_0c_2$ est nul, auquel cas le point $(x : y)$ en question est $(c_1 : -2c_0) = (-2c_2 : c_1)$ (il est donc rationnel) ; et lorsque $\Delta \neq 0$, *soit* les deux points géométriques sont tous les deux rationnels, *soit* aucun des deux ne l'est [1].

On va désormais s'intéresser à la courbe définie par une équation homogène de degré 2 dans le plan projectif.

Plus précisément, on appelle **conique** plane sur k une variété algébrique projective (i.e., un fermé de Zariski) C_q dans $\mathbb{P}^2$ définie par une équation $q = 0$ où $q \in k[x, y, z]$ est un polynôme homogène de degré 2 (on dit aussi « forme quadratique ») non nul [2] en trois variables x, y, z qu'on identifie aux coordonnées homogènes sur $\mathbb{P}^2$. À titre d'exemple, $\{x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$ est une telle conique.

En général, une conique s'écrit $\{q = 0\}$ où

$$q = a_x\, x^2 + a_y\, y^2 + a_z\, z^2 + b_x\, yz + b_y\, xz + b_z\, xy$$

avec $a_x, a_y, a_z, b_x, b_y, b_z$ six coefficients dans k, non tous nuls : on adoptera cette notation.

(2) On rappelle qu'un point $(x_0 : y_0 : z_0)$ de C_q est dit *singulier* lorsque $\frac{\partial q}{\partial x}$, $\frac{\partial q}{\partial y}$ et $\frac{\partial q}{\partial z}$ s'annulent simultanément en (x_0, y_0, z_0). Expliquer pourquoi un point vérifiant ces conditions est automatiquement sur C_q (i.e., pourquoi l'annulation

1. Ceci résulte de la formule du trinôme : les deux points sont $(c_1 \pm \sqrt{\Delta} : -2c_0) = (-2c_2 : c_1 \mp \sqrt{\Delta})$, ils sont rationnels si et seulement si Δ est un carré dans k, mais cette formule ne servira pas ici.

2. On pourra aussi librement faire l'hypothèse que q n'est pas le carré d'un polynôme l (forcément homogène) de degré 1 (= forme linéaire) ; en effet, s'il l'est, la conique $\{q = 0\}$ est simplement réduite à la droite $\{l = 0\}$ mais l'idéal (q) n'est pas radical (il faut imaginer la conique comme la droite « doublée ») : on ignorera donc ce cas.

de $\frac{\partial q}{\partial x}$, $\frac{\partial q}{\partial y}$ et $\frac{\partial q}{\partial z}$ en (x_0, y_0, z_0) quelconque implique automatiquement celle de q). Donner une condition pour que trois droites dans $\mathbb{P}^2$ soient concourantes (condition sur les coefficients de leurs équations). En déduire que la conique C_q a un point singulier si et seulement si ses coefficients vérifient

$$4a_x a_y a_z - a_x b_x^2 - a_y b_y^2 - a_z b_z^2 + b_x b_y b_z = 0$$

et qu'il revient au même de dire qu'elle a un point singulier géométrique ou rationnel.

On supposera maintenant, et jusqu'à la fin, que la conique est C_q *lisse*, c'est-à-dire vérifie $4a_x a_y a_z - a_x b_x^2 - a_y b_y^2 - a_z b_z^2 + b_x b_y b_z \neq 0$ (cf. question (2)).

(3) Sur k^{alg} (« géométriquement »), montrer que C_q ne contient aucune droite (i.e., montrer qu'il n'existe pas $l \in k^{\mathrm{alg}}[x, y, z]$ homogène de degré 1 tel que tous les points géométriques de la droite $\{l = 0\}$ soient dans C_q ; indication : si elle en contenait une alors on pourrait factoriser q sous la forme ll', contredisant l'hypothèse qu'on vient de faire). En déduire que C_q ne peut jamais contenir trois points alignés distincts.

Dans les questions qui suivent, on va s'intéresser à une application qui à un point de $\mathbb{P}^2$ associe une droite de $\mathbb{P}^2$ dite « polarité » par rapport à la conique.

Plus précisément, on appelle **droite polaire**, relativement à C_q (ou à q) d'un point $P_0 := (x_0 : y_0 : z_0)$ de $\mathbb{P}^2$ (non nécessairement situé sur C_q) la droite $\{u_0 x + v_0 y + w_0 z = 0\}$ dont les coefficients u_0, v_0, w_0 sont donnés par $\frac{\partial q}{\partial x}$, $\frac{\partial q}{\partial y}$ et $\frac{\partial q}{\partial z}$ respectivement, évalués en (x_0, y_0, z_0).

(4) Pourquoi cette définition a-t-elle un sens ? (Autrement dit, pourquoi u_0, v_0, w_0 ne s'annulent-ils pas simultanément, et pourquoi la droite ne dépend-elle pas du choix des coordonnées homogènes (x_0, y_0, z_0) de P_0 ?) Montrer que, si P_0 et P_1 sont deux points de $\mathbb{P}^2$, alors :

P_1 est sur la droite polaire de P_0 si et seulement si P_0 est sur la droite polaire de P_1

(« principe de réciprocité de la polarité ») ; on pourra exprimer ce fait de comme une équation symétrique entre les coordonnées homogènes (x_0, y_0, z_0) de P_0 et celles (x_1, y_1, z_1) de P_1. Montrer que P_0 est sur C_q si et seulement si il est situé sur sa propre droite polaire.

(5) Montrer que l'application envoyant un point de $\mathbb{P}^2$ sur sa droite polaire définit une bijection des points de $\mathbb{P}^2$ (géométriques ou rationnels) sur les droites de $\mathbb{P}^2$ (géométriques ou rationnelles) : pour cela, on pourra constater que l'application $(x_0, y_0, z_0) \mapsto (u_0, v_0, w_0)$ est k-linéaire. Expliquer pourquoi cette application envoie trois points alignés sur trois droites concourantes.

(6) Montrer que si P_0 est un point géométrique situé sur C_q, alors l'intersection de la droite polaire D_0 de P_0 avec C_q est réduite au seul point P_0. (S'il y avait un deuxième point, on pourra montrer qu'il aurait forcément la même droite polaire que P_0.) Expliquer pourquoi ce point P_0 est nécessairement rationnel si D_0 l'est.

On appelle **tangente** à C_q en un point de C_q la droite polaire de ce point : on vient de voir qu'une droite tangente à C_q la rencontre en ce seul point.

(7) Montrer qu'une droite D de $\mathbb{P}^2$ est tangente à C_q si et seulement si elle la coupe en un seul point géométrique. On pourra pour cela expliquer pourquoi on peut supposer que le point est $(1{:}0{:}0)$ et la droite $\{z = 0\}$, et simplifier l'équation la conique dans ce cas.

(8) Si P_0 est un point non situé sur C_q, montrer que les droites tangentes à C_q passant par P_0 sont exactement [3] les droites P_0M où M est un point d'intersection de C_q avec la droite polaire D de P_0. Expliquer pourquoi il en existe, géométriquement, exactement deux.

On appelle **triangle autopolaire** (relativement à C_q ou à q) la donnée de trois points P_0, P_1, P_2 distincts de $\mathbb{P}^2$ tels que la droite polaire de chacun soit la droite reliant les deux autres.

(9) Expliquer pourquoi on peut toujours trouver un triangle autopolaire de points rationnels. À quelle condition sur les coefficients de q le triangle $(1{:}0{:}0), (0{:}1{:}0), (0{:}0{:}1)$ est-il autopolaire ? En déduire que toute conique lisse s'écrit, après une transformation projective (à coefficients dans k), sous la forme $\{a_x\, x^2 + a_y\, y^2 + a_z\, z^2 = 0\}$ (on dit qu'elle est *diagonale*).

(10) Montrer le résultat suivant : si A_0, A_1, A_2, A_3 sont quatre points distincts situés sur la conique C_q, et si on pose $P_0 = A_0A_3 \wedge A_1A_2$ (c'est-à-dire : l'intersection de la droite reliant A_0 et A_3 et de celle reliant A_1 et A_2) et $P_1 = A_1A_3 \wedge A_0A_2$ et $P_2 = A_2A_3 \wedge A_0A_1$, alors le triangle P_0, P_1, P_2 est autopolaire. Pour cela, on pourra expliquer pourquoi on peut supposer que A_0, A_1, A_2, A_3 sont $(1{:}0{:}0), (0{:}1{:}0), (0{:}0{:}1), (1{:}1{:}1)$ respectivement et calculer à la fois les coordonnées de P_0, P_1, P_2 et des conditions sur les coefficients de q. En déduire une construction, à la règle seule. dans le plan projectif réel, de la droite polaire d'un point par rapport à une conique donnée (en supposant qu'elle a effectivement des points réels).

(11) Énumérer les points rationnels $(x : y : z)$ de la conique $\{x^2+y^2+z^2 = 0\}$ dans $\mathbb{P}^2$ sur le corps fini $\mathbb{F}_3$ à trois éléments. Combien y en a-t-il ?

3. (Le sujet distribué comportait une faute de frappe dans cette phrase : au lieu de « point d'intersection de C_q avec la droite polaire » il était écrit « point d'intersection de P_0 avec la droite polaire ».)