INF105
Contrôle de connaissances

Théorie des langages

15 juin 2023

Consignes.

Les exercices sont totalement indépendants. Ils pourront être traités dans un ordre quelconque, mais on demande de faire apparaître de façon très visible dans les copies où commence chaque exercice.

L'usage de tous les documents (notes de cours manuscrites ou imprimées, feuilles d'exercices, livres) est autorisé.

L'usage des appareils électroniques est interdit.

Durée : 1h30

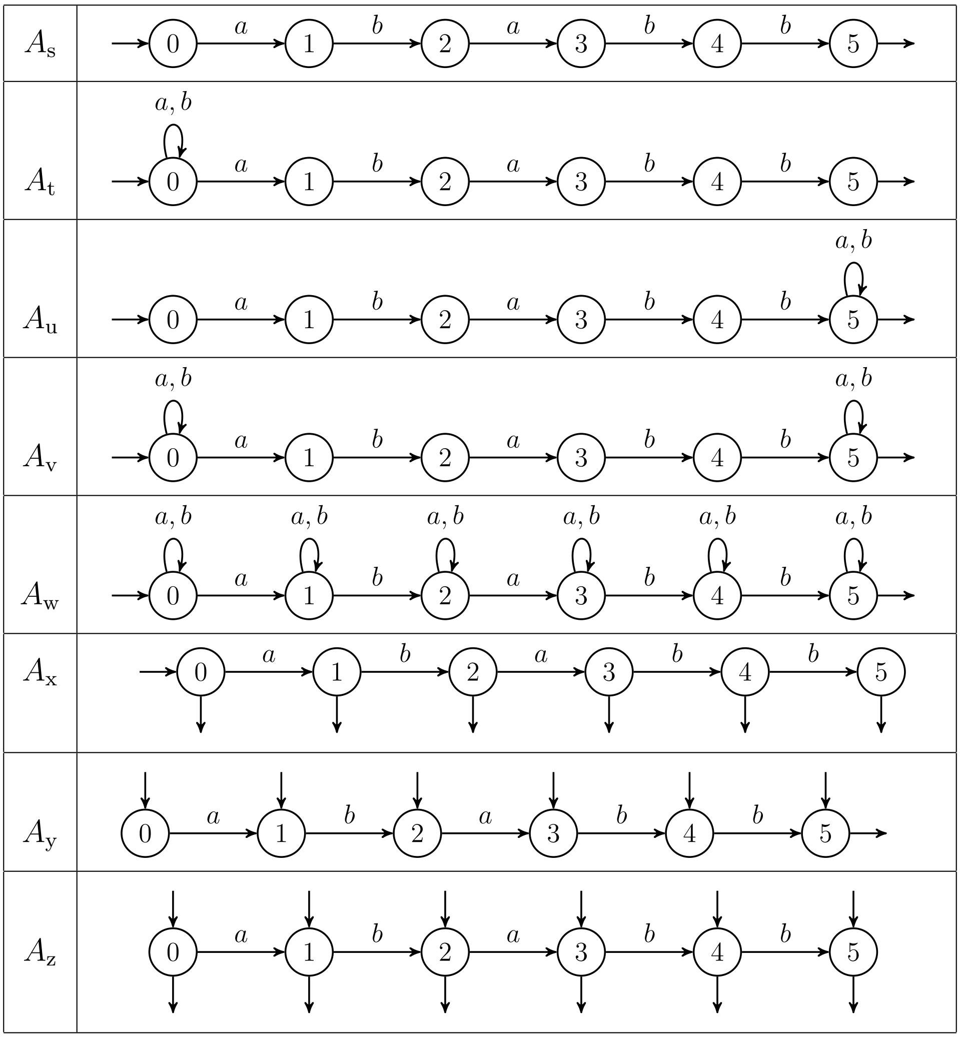
Barème *indicatif* et *approximatif* : exercice 1 : (a) 1.5, (b) 1.5, (c) 1, (d) 4, (e) 3, (f) 3 (soit au total 14) ; exercice 2 : (a) 1, (b) 2, (c) 1, (d) 2 (soit au total 6).

Cet énoncé comporte 4 pages (page de garde incluse).

Git : 8297c70 Thu Jun 29 16:30:06 2023 +0200

Exercice 1.

Dans cet exercice, on pose $\Sigma = \{a, b\}$. On considère les huit automates suivants ($A_{\mathrm{s}}, A_{\mathrm{t}}, A_{\mathrm{u}}, A_{\mathrm{v}}, A_{\mathrm{w}}, A_{\mathrm{x}}, A_{\mathrm{y}}, A_{\mathrm{z}}$) sur l'alphabet Σ :



On définit aussi les douze langages suivants, où w_0 désigne le mot $ababb$:

- $L_0 = \varnothing$: le langage vide.
- $L_1 = \{w_0\}$: le langage constitué du seul mot w_0.
- L_2 : le langage constitué des mots qui sont un sous-mot de w_0.
- L_3 : le langage constitué des mots qui ont w_0 comme sous-mot.
- L_4 : le langage constitué des mots qui sont un facteur de w_0.
- L_5 : le langage constitué des mots qui ont w_0 comme facteur.
- L_6 : le langage constitué des mots qui sont un préfixe de w_0.
- L_7 : le langage constitué des mots qui ont w_0 comme préfixe.
- L_8 : le langage constitué des mots qui sont un suffixe de w_0.
- L_9 : le langage constitué des mots qui ont w_0 comme suffixe.
- $L_{10} = \{w_0^i : i \in \mathbb{N}\}$: le langage constitué des mots qui sont une répétition d'un nombre quelconque (i) de copies de w_0 (par exemple, $ababbababb$).
- $L_{11} = \{b^i w_0 a^i : i \in \mathbb{N}\}$: le langage constitué des mots obtenus en précédant w_0 d'un nombre quelconque (i) de copies de la lettre b et en le suivant du même nombre de copies de la lettre a (par exemple, $bbababbaa$).

(a) Pour chacun des huit automates $A \in \{A_{\mathrm{s}}, A_{\mathrm{t}}, A_{\mathrm{u}}, A_{\mathrm{v}}, A_{\mathrm{w}}, A_{\mathrm{x}}, A_{\mathrm{y}}, A_{\mathrm{z}}\}$, dire lequel ou lesquels parmi les douze langages $L_0, \ldots, L_{11}$ est celui reconnu par l'automate A. On ne demande pas de justifier la réponse.

(b) Pour chacun des sept automates $A \in \{A_{\mathrm{s}}, A_{\mathrm{t}}, A_{\mathrm{u}}, A_{\mathrm{v}}, A_{\mathrm{w}}, A_{\mathrm{x}}, A_{\mathrm{y}}\}$ (cette question-ci n'est pas posée pour A_{z}), donner une expression rationnelle dénotant le langage L reconnu par A. On ne demande pas de justifier la réponse, et il n'est pas obligatoire d'appliquer un algorithme vu en cours.

(c) Pour chacun des huit automates $A \in \{A_{\mathrm{s}}, A_{\mathrm{t}}, A_{\mathrm{u}}, A_{\mathrm{v}}, A_{\mathrm{w}}, A_{\mathrm{x}}, A_{\mathrm{y}}, A_{\mathrm{z}}\}$, dire de quel type d'automate vu en cours (DFA complet, DFA à spécification incomplète, NFA ou bien NFA à transitions spontanées) est l'automate A. On donnera à chaque fois le type le plus particulier applicable.

(d) Pour chacun des cinq automates $A \in \{A_{\mathrm{s}}, A_{\mathrm{u}}, A_{\mathrm{v}}, A_{\mathrm{x}}, A_{\mathrm{z}}\}$ (cette question-ci n'est pas posée pour $A_{\mathrm{t}}, A_{\mathrm{w}}, A_{\mathrm{y}}$), donner un DFA complet sans état inaccessible qui soit équivalent à A (c'est-à-dire, reconnaissant le langage L). On appliquera un algorithme vu en cours en le nommant.

Conseil sur la présentation graphique : pour s'éviter des maux de tête dans le placement des états (et en éviter aussi au correcteur), il est conseillé de commencer par placer horizontalement de gauche à droite les états successifs rencontrés lors de la consommation du mot $w_0 = ababb$ par l'automate construit, et d'ajouter ensuite les autres états éventuellement nécessaires.

(e) Pour $A = A_{\mathrm{z}}$ (et seulement celui-ci), minimiser le DFA trouvé à la question (d).

(f) Parmi les douze langages $L_0, \ldots, L_{11}$, lesquels sont rationnels ? Lesquels sont algébriques ? Lesquels sont décidables ? Lesquels sont semi-décidables ? On justifiera la réponse à chaque fois (par exemple en donnant une expression rationnelle, un automate, une grammaire hors-contexte, un algorithme, ou n'importe quel autre type d'argument permettant de conclure).

Exercice 2.

Dans cet exercice, les questions (1) et (2) sont indépendantes, et la question (4) ne dépend que de la question (2).

(1) La fonction $h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ suivante est-elle calculable ?

$$h(0) = 1 \quad , \quad h(1) = 10 \quad , \quad h(2) = 10^{10} \quad , \quad h(3) = 10^{10^{10}} \quad , \quad h(4) = 10^{10^{10^{10}}} \quad ,$$

$$h(n) = \left.10^{10^{\cdot^{\cdot^{\cdot 10}}}}\right\} n$$

(Autrement dit, $h(n)$ est une tour d'exponentielle de hauteur n sur le nombre 10. Bien sûr, $10^{10^{10}}$ se comprend comme $10^{\left(10^{10}\right)}$.)

Fixons maintenant une numérotation (« codage de Gödel ») des algorithmes prenant en entrée un entier et renvoyant un entier, et appelons $\varphi_e(n)$ le résultat de l'exécution du programme codé par l'entier e sur l'entrée n, si cette exécution termine (et $\varphi_e(n)$ non défini si cette exécution ne termine pas). Considérons la fonction $b\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ suivante :

$$b(n) = \max\{\varphi_e(n) : 0 \leq e \leq n \text{ et } \varphi_e(n) \text{ défini}\}$$

(Autrement dit, $b(n)$ est la plus grande des valeurs $\varphi_e(n)$ qui sont définies lorsque e parcourt les entiers de 0 à n.)

(2) On veut montrer que pour toute fonction calculable $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, il existe un n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$ on ait $b(n) > f(n)$. Supposons donc $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ calculable. **(a)** Expliquer pourquoi il existe p tel que $\varphi_p = f + 1$ (c'est-à-dire $\varphi_p(n) = f(n) + 1$ pour tout n). **(b)** En déduire que $b(n) > f(n)$ lorsque $n \geq p$, et conclure.

(3) Montrer que (pour les fonctions h et b introduites ci-dessus) :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{b(n)}{h(n)} = +\infty$$

(4) On se propose ici de redémontrer l'indécidabilité du problème de l'arrêt de manière légèrement différente de ce qui a été vu en cours. Supposons donc par l'absurde que le problème de l'arrêt $H = \{(e, n) : \varphi_e(n) \text{ défini}\}$ soit décidable. **(a)** Montrer soigneusement, sous cette hypothèse, que b est calculable. **(b)** Conclure.