

MITRO206

Contrôle de connaissances — Corrigé

Théories des jeux

17 avril 2023

Consignes.

Les exercices sont totalement indépendants. Ils pourront être traités dans un ordre quelconque, mais on demande de faire apparaître de façon très visible dans les copies où commence chaque exercice.

La longueur du sujet ne doit pas effrayer : l'énoncé est long parce que des rappels ont été faits et que la rédaction des questions cherche à éviter toute ambiguïté. De plus, il ne sera pas nécessaire de traiter la totalité pour avoir la note maximale.

L'usage de tous les documents (notes de cours manuscrites ou imprimées, feuilles d'exercices, livres) est autorisé.

L'usage des appareils électroniques est interdit.

Durée : 2h

Barème *indicatif* : 5 + 5 + 5 + 7 (sur 20)

Ce corrigé comporte 8 pages (page de garde incluse).

Exercice 1.

On considère le jeu de nim éventuellement transfini. (On rappelle qu'il est défini de la manière suivante : une position du jeu est un tuple $(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ d'ordinaux, on dit qu'il y a « α_i bâtonnets sur la ligne i », et un coup consiste à décroître strictement *un et un seul* des α_i , autrement dit il existe un coup de $(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ vers $(\alpha_1, \dots, \beta, \dots, \alpha_r)$ où $\beta < \alpha_i$ est mis à la place de α_i .)

Pour chacune des positions suivantes, dire si c'est une position P (c'est-à-dire gagnante pour le joueur qui vient de jouer) ou N (c'est-à-dire gagnante pour le joueur qui doit jouer), et, dans ce dernier cas, donner un coup gagnant possible pour le joueur en question.

(a) $(1, 2, 3)$ (autrement dit, une ligne avec 1 bâtonnet, une ligne avec 2, et une ligne avec 3)

Corrigé. On a $1 = 2^0$ et $2 = 2^1$ et $3 = 2^1 + 2^0 = 2^1 \oplus 2^0$ si bien que $1 \oplus 2 \oplus 3 = 0$: la valeur de Grundy de la position est 0, et c'est donc une position P. ✓

(b) $(3, 6, 9)$

Corrigé. On a $3 = 2^1 + 2^0 = 2^1 \oplus 2^0$ et $6 = 2^2 + 2^1 = 2^2 \oplus 2^1$ et $9 = 2^3 + 2^0 = 2^3 \oplus 2^0$ si bien que $3 \oplus 6 \oplus 9 = 2^3 \oplus 2^2 = 2^3 + 2^2 = 12$: la valeur de Grundy de la position est 12, et c'est donc une position N.

Pour trouver un coup gagnant, c'est-à-dire un coup vers une position P, on cherche à annuler la valeur de Grundy : autrement dit, on cherche à remplacer le nombre n de bâtonnets d'une ligne par $n \oplus 12$, et il s'agit donc de trouver une ligne telle que $n \oplus 12 < n$. On vérifie facilement que la seule possibilité est de réduire la ligne ayant 9 bâtonnets à $9 \oplus 12 = 2^2 + 2^0 = 5$ bâtonnets. Bref, le seul coup gagnant est $(3, 6, 9) \rightarrow (3, 6, 5)$. ✓

(c) $(\omega, \omega 2, \omega 3)$

Corrigé. En se rappelant que $\omega = 2^\omega$, on a $\omega 2 = 2^{\omega+1}$ et $\omega 3 = 2^{\omega+1} + 2^\omega$ en binaire : on a donc $\omega \oplus (\omega 2) \oplus (\omega 3) = 0$: la valeur de Grundy de la position est 0, et c'est donc une position P. ✓

(d) $(\omega, \omega^2, \omega^3)$

Corrigé. En se rappelant de nouveau que $\omega = 2^\omega$, on a $\omega^2 = 2^{\omega^2}$ et $\omega^3 = 2^{\omega^3}$ en binaire : on a donc $\omega \oplus \omega^2 \oplus \omega^3 = 2^{\omega^3} + 2^{\omega^2} + 2^\omega = \omega^3 + \omega^2 + \omega =: \gamma$: la valeur de Grundy de la position est $\gamma \neq 0$, et c'est donc une position N.

Comme dans la question (b), on cherche à annuler la valeur de Grundy, autrement dit remplacer le nombre α de bâtonnets d'une ligne par $\alpha \oplus \gamma$ (où $\gamma = \omega^3 + \omega^2 + \omega$, qu'il vaut mieux penser comme $2^{\omega^3} \oplus 2^{\omega^2} \oplus 2^\omega$) d'une manière à ce que le résultat soit plus petit. On vérifie facilement que la seule possibilité est de réduire la ligne ayant ω^3 bâtonnets à $\omega^3 \oplus \gamma = \omega^2 + \omega$ bâtonnets. Bref, le seul coup gagnant est $(\omega, \omega^2, \omega^3) \rightarrow (\omega, \omega^2, \omega^2 + \omega)$. ✓

(e) $(\omega, \omega^\omega, \omega^{\omega^\omega})$

Corrigé. En se rappelant une fois de plus que $\omega = 2^\omega$, on a $\omega^\omega = (2^\omega)^\omega = 2^{\omega \times \omega} = 2^{\omega^2}$, et $\omega^{\omega^\omega} = (2^\omega)^{\omega^\omega} = 2^{\omega \times \omega^\omega} = 2^{\omega^{1+\omega}} = 2^{\omega^\omega}$. Le raisonnement est alors exactement analogue à la question (d) (car la seule chose qui importe dans cette question est qu'on ait affaire à trois puissances de 2 distinctes) : la valeur de Grundy de la position est $\gamma := 2^{\omega^\omega} + 2^{\omega^2} + 2^\omega = \omega^{\omega^\omega} + \omega^\omega + \omega \neq 0$ donc c'est une position N, et le seul coup gagnant est $(\omega, \omega^\omega, \omega^{\omega^\omega}) \rightarrow (\omega, \omega^\omega, \omega^{\omega^\omega} + \omega)$. ✓

(f) $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ où $\varepsilon_0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \varepsilon_3$ sont les quatre premiers ordinaux¹ vérifiant $\varepsilon = \omega^\varepsilon$.

1. On peut définir ε_{n+1} comme la limite, c'est-à-dire la borne supérieure, de la suite $(u_k)_{k < \omega}$ strictement croissante définie par $u_0 = (\varepsilon_n) + 1$ et $u_{k+1} = \omega^{u_k}$, c'est-à-dire $u_1 = \omega^{(\varepsilon_n)+1}$ et $u_2 = \omega^{\omega^{(\varepsilon_n)+1}}$, etc., mais on n'aura pas besoin de ce fait.

Corrigé. Pour $i \in \{1, 2, 3\}$ (ou n'importe quel ordinal, en fait), on a $\varepsilon_i = \omega^{\varepsilon_i} = (2^\omega)^{\varepsilon_i} = 2^{\omega \cdot \varepsilon_i} = 2^{\omega \cdot \omega^{\varepsilon_i}} = 2^{\omega^{1+\varepsilon_i}} = 2^{\omega^{\varepsilon_i}} = 2^{\varepsilon_i}$ (en utilisant au passage le fait, facilement vérifié, que $1 + \rho = \rho$ quel que soit l'ordinal infini ρ). Le raisonnement est alors exactement analogue aux questions (d) et (e) (car la seule chose qui importe dans ces questions ait qu'on ait affaire à trois puissances de 2 distinctes) : la valeur de Grundy de la position est $\gamma := 2^{\varepsilon_3} + 2^{\varepsilon_2} + 2^{\varepsilon_1} = \varepsilon_3 + \varepsilon_2 + \varepsilon_1 \neq 0$ donc c'est une position N, et le seul coup gagnant est $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \rightarrow (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_2 + \varepsilon_1)$. ✓

(g) Donner un exemple de position N du jeu de nim (de préférence fini) avec un nombre distinct de bâtonnets sur chaque ligne (i.e., les α_i sont deux à deux distincts), où il existe strictement plus qu'un coup gagnant pour le joueur qui doit jouer. (Pour indication, ceci est possible à partir de trois lignes de bâtonnets.)

Corrigé. On cherche donc une position (n_1, n_2, n_3) avec trois lignes de bâtonnets, de valeur de Grundy $g := n_1 \oplus n_2 \oplus n_3$, telle qu'au moins deux des trois quantités $n_i \oplus g$ soit strictement inférieure au n_i correspondant (le raisonnement étant expliqué à la question (b)), en prenant note du fait que $n_1 \oplus g = n_2 \oplus n_3$ et de façon analogue pour les trois autres. On cherche donc, par exemple, à avoir $n_1 \oplus n_3 < n_2$ et $n_1 \oplus n_2 < n_3$. Ceci n'est pas difficile en prenant par exemple pour n_1 une puissance de 2 qui existe dans l'écriture binaire de n_2 et de n_3 mais telle qu'en l'enlevant on obtienne des nombres strictement plus petits. Par exemple, la position $(2, 6, 7)$ (de valeur de Grundy $2 \oplus 6 \oplus 7 = 3 =: g$) admet des coups gagnants vers $(2, 5, 7)$ ou $(2, 6, 4)$ ou même $(1, 6, 7)$. ✓

Exercice 2.

Si G est un graphe orienté bien-fondé (qu'on peut considérer comme l'ensemble des positions d'un jeu combinatoire auquel il ne manque que l'information, sans pertinence ici, de la position initiale), on rappelle qu'on a défini la fonction rang

$$\text{rk}(x) := \sup^+ \{\text{rk}(y) : y \in \text{outnb}(x)\} = \sup \{\text{rk}(y) + 1 : y \in \text{outnb}(x)\}$$

(en notant $\sup^+ S$ le plus petit ordinal strictement supérieur à tous les ordinaux de S et $\sup S$ le plus petit ordinal supérieur ou égal à tous les ordinaux de S , et $\text{outnb}(x)$ l'ensemble des voisins sortants de x), et la fonction de Grundy

$$\text{gr}(x) := \text{mex} \{\text{gr}(y) : y \in \text{outnb}(x)\}$$

(où $\text{mex } S$ désigne le plus petit ordinal qui n'est pas dans S), — ces définitions ayant bien un sens par induction bien-fondée. La première mesure en quelque sorte la durée du jeu si les deux joueurs coopèrent pour le faire durer aussi longtemps que possible, et la seconde nous donne notamment l'information de quel joueur a une stratégie gagnante.

On va maintenant définir une fonction qui mesure en quelque sorte la durée du jeu si le joueur perdant cherche à perdre aussi lentement que possible tandis que le joueur gagnant cherche à gagner aussi vite que possible. Précisément, on pose

$$\begin{cases} \text{dur}(x) := \sup \{\text{dur}(y) + 1 : y \in \text{outnb}(x)\} & \text{si } \text{gr}(x) = 0 \\ \text{dur}(x) := \min \{\text{dur}(y) + 1 : y \in \text{outnb}(x) \text{ et } \text{gr}(y) = 0\} & \text{si } \text{gr}(x) \neq 0 \end{cases}$$

(où $\min S$ désigne le plus petit ordinal de S , si S est un ensemble non-vide d'ordinaux).

(1) Expliquer pourquoi cette définition a bien un sens (on prendra garde au fait que $\min \emptyset$ n'est pas défini).

Corrigé. Lorsque $gr(x) \neq 0$, il existe au moins un voisin sortant $y \in \text{outnb}(x)$ tel que $gr(y) = 0$ (car le mex est la plus petite valeur exclue : si un tel y n'existait pas, le mex serait 0) : ceci assure que le min dans la deuxième ligne de la définition porte toujours sur un ensemble non-vide.

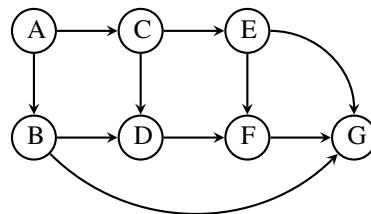
En-dehors de ce fait, la définition ne pose pas de problème : le sup d'un ensemble d'ordinaux existe toujours, et la récursivité de la définition est légitime par induction bien-fondée, c'est-à-dire que $dur(x)$ peut faire appel aux valeurs de $dur(y)$ pour des voisins sortants y de x . (Le fait de faire appel à $gr(y)$ n'est pas un problème car on sait que gr est bien défini, et la distinction en cas est légitime de toute manière.) ✓

(2) Expliquer rapidement et informellement pourquoi $dur(x)$ correspond bien à l'explication intuitive qu'on a donnée.

Corrigé. Quand x est une position avec $gr(x) = 0$, c'est-à-dire une position P, le joueur qui doit jouer est le joueur perdant (n'ayant pas de stratégie gagnante) : il joue donc vers une position y le faisant perdre le plus lentement possible, c'est-à-dire avec $dur(y)$ aussi grand que possible, d'où la définition $dur(x) = \sup \{dur(y) + 1 : y \in \text{outnb}(x)\}$ dans ce cas (le +1 sert à compter le coup joué par ce joueur).

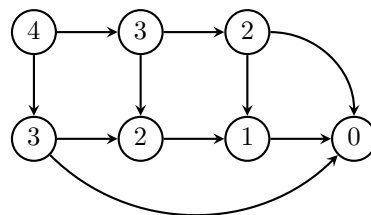
Au contraire, lorsque $gr(x) \neq 0$, c'est-à-dire que x est une position N, le joueur qui doit jouer est le joueur gagnant : il joue donc vers une position y le faisant gagner le plus rapidement possible, c'est-à-dire avec $dur(y)$ aussi petit que possible parmi les coups $x \rightarrow y$ gagnants, autrement dit ceux pour lesquels $gr(y) = 0$, d'où la définition $dur(x) = \min \{dur(y) + 1 : y \in \text{outnb}(x) \text{ et } gr(y) = 0\}$ dans ce cas (le +1 sert à compter le coup joué par ce joueur). ✓

(3) Sur le graphe G représenté ci-dessous, calculer chacune des fonctions rk , gr et dur (les lettres servent simplement à étiqueter les sommets) :

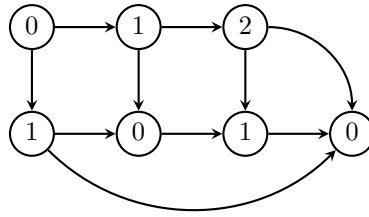


Si on joue à partir du sommet A comme position initiale et que, comme suggéré dans la définition de dur , le joueur perdant cherche à perdre aussi lentement que possible tandis que le joueur gagnant cherche à gagner aussi vite que possible, quelle sera le déroulement du jeu ?

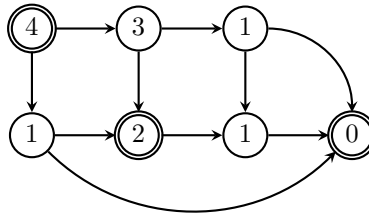
Corrigé. Les sommets ont été fort sympathiquement étiquetés dans un ordre compatible avec le rang (tri topologique), c'est-à-dire que chaque arête pointe vers un sommet situé strictement après dans l'ordre alphabétique. On effectue donc les calculs dans l'ordre alphabétique inversé. On trouve, pour le rang :



Pour la valeur de Grundy :



Et pour la fonction dur (afin de rendre le calcul plus facile à suivre, on a entouré en double les sommets de valeur de Grundy 0) :



Si on joue à partir de la position A, le premier joueur, appelons-la Alice, est en position perdante car la valeur de Grundy est nulle, et va jouer vers C car c'est ce qui maximise la fonction dur ; son adversaire, appelons-le Bob, joue alors vers D car c'est le seul coup gagnant, après quoi Alice joue vers F (seul coup possible) et Bob joue vers G. ✓

(4) Montrer que, dans n'importe quel graphe G bien-fondé, et pour n'importe quel sommet x de G , on a $\text{dur}(x) \leq \text{rk}(x)$.

Corrigé. On montre par induction bien-fondée que $\text{dur}(x) \leq \text{rk}(x)$. On peut donc faire l'hypothèse qu'on sait que $\text{dur}(y) \leq \text{rk}(y)$ pour tout voisin sortant $y \in \text{outnb}(x)$ (hypothèse d'induction). Dans le cas où $\text{gr}(x) = 0$, on a $\text{dur}(x) = \sup \{\text{dur}(y) + 1 : y \in \text{outnb}(x)\}$, qui est $\leq \sup \{\text{rk}(y) + 1 : y \in \text{outnb}(x)\}$ par hypothèse d'induction (il est clair qu'augmenter au sens large tous les éléments d'un ensemble d'ordinaux augmente son sup au sens large), et ceci vaut $\text{rk}(x)$ par définition. Dans le cas où $\text{gr}(x) \neq 0$, on a $\text{dur}(x) = \min \{\text{dur}(y) + 1 : y \in \text{outnb}(x) \text{ et } \text{gr}(y) = 0\} \leq \sup \{\text{dur}(y) + 1 : y \in \text{outnb}(x) \text{ et } \text{gr}(y) = 0\} \leq \sup \{\text{dur}(y) + 1 : y \in \text{outnb}(x)\}$ de façon évidente ($\min S \leq \sup S$ est clair), et pour la même raison que précédemment, ceci est $\leq \sup \{\text{rk}(y) + 1 : y \in \text{outnb}(x)\} = \text{rk}(x)$. ✓

Exercice 3.

Soit G un graphe orienté dont l'ensemble des sommets est (au plus) dénombrable, et soit x_0 un sommet de G . (Il n'y a pas d'autre hypothèse sur G , par exemple on ne suppose pas que G est bien-fondé.)

On considère le jeu suivant. Deux joueurs s'affrontent, qu'on appellera *le Fugueur* et *le Borneur*. Le Fugueur commence, après quoi ils jouent tour à tour. En partant de x_0 , chaque joueur, quand vient son tour, choisit un voisin sortant de la position actuelle x ou bien choisit de conserver x ; autrement dit, il choisit un élément de $\text{outnb}(x) \cup \{x\}$. (Pour être parfaitement clair : au premier tour, le Fugueur choisit $x_1 \in \text{outnb}(x_0) \cup \{x_0\}$, puis le Borneur choisit $x_2 \in \text{outnb}(x_1) \cup \{x_1\}$, et ainsi de suite.) Le jeu dure infiniment longtemps (manifestement, les règles permettent toujours à chaque joueur de faire un coup). Au bout d'un nombre infini de coups, on considère la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de toutes les positions traversées :

- si cette suite est d'image finie (c'est-à-dire que l'ensemble $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ de toutes les positions traversées est fini), alors le Borneur a gagné ;
- sinon, le Fugueur a gagné.

(1) Montrer, en appliquant un des résultats du cours, que l'un des joueurs a nécessairement une stratégie gagnante (on ne demande pas de préciser lequel). On pourra préalablement montrer

que pour toute partie $F \subseteq G$, la partie $F^{\mathbb{N}} \subseteq G^{\mathbb{N}}$ est *fermée* (pour la topologie sur $G^{\mathbb{N}}$ produit de la topologie discrète²), et en déduire une propriété de l'ensemble $\bigcup_{F \text{ fini } \subseteq G} F^{\mathbb{N}}$ réunion des $F^{\mathbb{N}}$ où F parcourt toutes les parties *finies* de G .

Corrigé. Pour commencer, montrons que si F est une partie de G alors $F^{\mathbb{N}} \subseteq G^{\mathbb{N}}$ est fermée. Ceci revient à montrer que son complémentaire est ouvert, autrement dit, que si $\underline{x} \in G^{\mathbb{N}}$ n'est pas dans $F^{\mathbb{N}}$, alors il existe un voisinage fondamental de \underline{x} qui ne rencontre pas $F^{\mathbb{N}}$. Or si $\underline{x} \in G^{\mathbb{N}}$ n'est pas dans $F^{\mathbb{N}}$, c'est qu'elle a une valeur x_ℓ qui n'est pas dans F , et toute suite commençant par x_0, \dots, x_ℓ n'est pas dans $F^{\mathbb{N}}$, c'est-à-dire que le voisinage fondamental $V_{\ell+1}(\underline{x})$ est inclus dans le complémentaire de $F^{\mathbb{N}}$. Ceci achève de montrer que $F^{\mathbb{N}} \subseteq G^{\mathbb{N}}$ est fermée.

Maintenant, l'ensemble \mathcal{F} des parties finies d'un ensemble (au plus) dénombrable, en l'occurrence, G , est (au plus) dénombrable. Ce fait peut être tenu pour acquis, mais rappelons pourquoi il est vrai : en effet, si $G = \{g_i : i \in \mathbb{N}\}$, alors on peut par exemple énumérer \mathcal{F} à travers les écritures binaires, ou plus précisément, $\mathcal{F} = \{F_n : n \in \mathbb{N}\}$ où F_n désigne la partie finie $\{g_{i_0}, \dots, g_{i_r}\}$ lorsque $n = 2^{i_0} + \dots + 2^{i_r}$ avec i_0, \dots, i_r entiers naturels distincts (autrement dit, $F_0 = \emptyset$, $F_1 = \{g_0\}$, $F_2 = \{g_1\}$, $F_3 = \{g_0, g_1\}$, etc.). Peu importe le fait qu'il y ait des répétitions dans l'énumération F_n (un ensemble surjecté par \mathbb{N} est encore dénombrable).

Ceci nous permet de dire que $\bigcup_{F \text{ fini } \subseteq G} F^{\mathbb{N}}$, autrement dit $\bigcup_{F \in \mathcal{F}} F^{\mathbb{N}}$, est une réunion dénombrable de fermés dans $G^{\mathbb{N}}$. Comme un fermé est borélien, c'est une réunion dénombrable de boréliens, donc c'est encore un borélien.

Enfin, remarquons que dire que l'ensemble $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ est fini revient à dire qu'il est inclus un ensemble fini F , autrement dit, que la suite $\underline{x} = (x_n)$ appartient à $F^{\mathbb{N}}$ pour un certain ensemble fini F , ou, ce qui revient au même, qu'elle appartient à $\bigcup_{F \in \mathcal{F}} F^{\mathbb{N}}$.

On a donc affaire à un jeu de Gale-Stewart défini par l'ensemble de suites $B := \bigcup_{F \in \mathcal{F}} F^{\mathbb{N}}$ borélien (ou par son complémentaire $A := G^{\mathbb{N}} \setminus B$ si on prend le point de vue du Fugueur). Le théorème de détermination borélienne de Martin assure que l'un des joueurs a forcément une stratégie gagnante. ✓

(2) Indépendamment de la question précédente, donner un exemple de couple (G, x_0) pour lequel le Borneur possède une stratégie gagnante à ce jeu. Donner un exemple pour lequel le Fugueur en possède une. (On cherchera à donner des exemples aussi simples que possibles.)

Corrigé. Si G est le graphe formé du seul sommet x_0 , alors le Borneur gagne trivialement (la suite sera la suite constante).

Si G est le graphe formé des entiers naturels avec une arête $i \rightarrow j$ lorsque $i < j$ (autrement dit des petits entiers naturels vers les grands), ou même seulement $i \rightarrow i + 1$, alors le Fugueur a une stratégie gagnante consistant à jouer de i vers $i + 1$, ce qui assure que la suite (x_{2i+1}) des positions choisies par le Fugueur est strictement croissante quoi que fasse le Borneur (il ne peut pas revenir en arrière), et notamment, elle n'est pas d'image finie. ✓

Exercice 4.

On considère une variante à *somme (possiblement) non-nulle* de Pierre-Papier-Ciseaux, à savoir le jeu en forme normale défini par la matrice de gain suivante :

↓Alice, Bob→	U	V	W
U	x, x	$-1, +1$	$+1, -1$
V	$+1, -1$	x, x	$-1, +1$
W	$-1, +1$	$+1, -1$	x, x

2. C'est-à-dire celle qui a été étudiée en cours.

où x est un réel et, pour plus de commodité, on a écrit U pour « Pierre », V pour « Papier » et W pour « Ciseaux ». (La ligne correspond à l'option choisie par Alice, la colonne à l'option de Bob, et chaque case indique le gain d'Alice suivi du gain de Bob.)

Le but de l'exercice est d'étudier les équilibres de Nash de ce jeu.

(On prendra bien note, pour simplifier les raisonnements en cas, du fait que les options ont une symétrie cyclique³, et que les joueurs ont eux aussi des rôles symétriques.)

(1) Considérons le profil de stratégies mixtes dans lequel les deux joueurs choisissent chacun chaque option avec probabilité $\frac{1}{3}$ (c'est-à-dire la stratégie qui est optimale dans le cas à somme nulle). Pour quelle(s) valeur(s) de x ce profil est-il un équilibre de Nash ?

Corrigé. Pour des raisons de symétrie, si l'un des joueurs joue cette stratégie mixte $\frac{1}{3}U + \frac{1}{3}V + \frac{1}{3}W$, le gain espéré de chacun des deux joueurs est le même quelle que soit la stratégie pure, donc aussi mixte, de l'autre joueur. Cette valeur se calcule d'ailleurs aisément (comme somme des trois colonnes, ou des trois lignes, de la matrice de gains, affectées des coefficients $\frac{1}{3}$) : c'est $\frac{1}{3}x$; mais la seule chose qui importe est que l'adversaire ait le même gain espéré quelle que soit la stratégie pure, donc aussi mixte, qu'il choisit : il n'a donc pas intérêt à changer unilatéralement sa stratégie. Il s'agit donc *toujours* d'un équilibre de Nash, quelle que soit la valeur de x . ✓

On suppose dorénavant que $x < -1$.

(2) Existe-t-il un équilibre de Nash dans lequel Alice joue purement U ? (On raisonnera les options pouvant être dans le support de la stratégie de Bob en réponse.) En déduire tous les équilibres de Nash dans lesquels au moins un joueur joue une stratégie pure.

Corrigé. Si Alice joue purement U , les gains de Bob pour les différentes stratégies pures de sa réponse sont x pour U , $+1$ pour V et -1 pour W d'après la matrice de gains. Comme $+1 > -1 > x$, la seule option qui peut faire partie du support d'une meilleure réponse de Bob est V , autrement dit, si Alice joue purement U dans un équilibre de Nash, Bob répond forcément purement V . Mais par le même raisonnement (compte tenu de la symétrie cyclique des options et de la symétrie des joueurs), si Bob joue purement V , Alice joue W (et pas U comme supposé). Il ne peut donc pas y avoir d'équilibre de Nash dans lequel Alice joue purement U . Et de nouveau par symétrie cyclique des options et symétrie des joueurs, il ne peut y avoir aucun équilibre de Nash dans lequel un joueur jouerait une stratégie pure. ✓

(3) Dans cette question et la suivante, envisageons un équilibre de Nash dans lequel Alice joue la stratégie mixte $pU + (1-p)V$ avec $0 < p < 1$. Supposons dans cette question que Bob réponde avec une stratégie mixte ayant elle aussi $\{U, V\}$ comme support. Montrer que $p = \frac{x+1}{2x}$ et que le gain de Bob est $\frac{x^2+1}{2x}$. En utilisant le fait que $\frac{x^2+1}{2x} < -\frac{1}{x}$ lorsque $x < -1$ (qu'on admettra pour ne pas perdre son temps en calculs inutiles), en déduire qu'un tel équilibre de Nash n'existe pas.

Corrigé. Si Alice joue $pU + (1-p)V$, les gains espérés de Bob pour les différences stratégies pures de sa réponse sont $px - (1-p) = -1 + (x+1)p$ pour U , $p + (1-p)x = x - (x-1)p$ pour V et $-p + (1-p) = 1 - 2p$ pour W . Si une meilleure réponse de Bob a $\{U, V\}$ comme support, ces deux options doivent apporter le même gain espéré, c'est-à-dire qu'on doit avoir $-1 + (x+1)p = x - (x-1)p$, ce qui équivaut à $p = \frac{x+1}{2x}$, et le gain en question est $\frac{x^2+1}{2x}$, tandis que le gain espéré pour W est alors $1 - 2p = -\frac{1}{x}$. D'après l'inégalité $\frac{x^2+1}{2x} < -\frac{1}{x}$, l'option W fournit un meilleur gain espéré pour Bob, donc $\{U, V\}$ ne peut pas être le support d'une meilleure réponse de Bob à $pU + (1-p)V$ d'Alice. ✓

(4) On considère toujours un équilibre de Nash dans lequel Alice joue la stratégie mixte $pU + (1-p)V$ avec $0 < p < 1$. Supposons maintenant que Bob réponde avec une stratégie mixte

3. C'est-à-dire que remplacer U par V et V par W et W par U ne change rien au jeu.

ayant (au moins) U et W dans son support support. Montrer que $p = \frac{2}{x+3}$ (et que $x \neq -3$); en utilisant le fait que $\frac{2}{x+3} > 1$ lorsque $-3 < x < -1$ et que $\frac{2}{x+3} < 0$ lorsque $x < -3$ (de nouveau, on admettra ces faits pour ne pas perdre de temps en calculs), en déduire qu'un tel équilibre de Nash n'existe pas.

Corrigé. On a dit dans la question (3) que si Alice joue $pU + (1-p)V$, les gains espérés de Bob pour les différences stratégies pures de sa réponse sont $px - (1-p) = -1 + (x+1)p$ pour U , $p + (1-p)x = x - (x-1)p$ pour V et $-p + (1-p) = 1 - 2p$ pour W . Si une meilleure réponse de Bob a U et W dans son support, ces deux options doivent apporter le même gain espéré, c'est-à-dire qu'on doit avoir $-1 + (x+1)p = 1 - 2p$, ce qui équivaut à $(x+3)p = 3$, donc $x \neq 3$ et $p = \frac{2}{x+3}$. D'après les inégalités admises, p , qui devrait être entre 0 et 1, ne l'est jamais si $x < -1$, donc un tel équilibre de Nash n'existe pas. ✓

(5) Expliquer soigneusement pourquoi les questions (2) à (4) montrent que dans tout équilibre de Nash du jeu considéré, les deux joueurs jouent une stratégie mixte ayant $\{U, V, W\}$ comme support (i.e., aucun ensemble strictement plus petit n'est possible).

Corrigé. On a vu en (2) qu'il n'existe aucun équilibre de Nash dans lequel un joueur joue une stratégie pure. Supposons maintenant un équilibre de Nash dans lequel un joueur a deux options dans son support. Par symétrie, sans perte de généralité, on peut supposer que c'est Alice et que ces deux options sont U et V . Comme les stratégies pures sont exclues, les supports possibles de la réponse de Bob sont : $\{U, V\}$, $\{U, W\}$, $\{V, W\}$ et $\{U, V, W\}$. Dans la question (3) on a exclu $\{U, V\}$; dans la question (4), on a exclu $\{U, W\}$ et $\{U, V, W\}$. Reste le cas où le support de la stratégie de Bob est $\{V, W\}$ (tandis que celui d'Alice est, on le rappelle, $\{U, V\}$). Mais quitte à effectuer une symétrie cyclique des options ($U \rightarrow W \rightarrow V \rightarrow U$) et échanger les joueurs, cela revient au cas où le support de la stratégie d'Alice est $\{U, V\}$ et celui de Bob est $\{U, W\}$: or on a déjà exclu ce cas. Il ne reste donc aucune possibilité. ✓

(6) Envisageons maintenant un équilibre de Nash dans lequel Alice joue une stratégie mixte $pU + p'V + (1-p-p')W$ avec $p > 0$, $p' > 0$ et $1-p-p' > 0$ et Bob répond par une stratégie ayant elle aussi $\{U, V, W\}$ comme support. Écrire un système de deux équations linéaires vérifié par p, p' , justifier que ce système est non-dégénéré et conclure. Quels sont tous les équilibres de Nash du jeu ?

Corrigé. Si Alice joue $pU + p'V + (1-p-p')W$, les gains espérés de Bob pour les différences stratégies pures de sa réponse sont $px - p' + (1-p-p') = 1 + (x-1)p - 2p'$ pour U , $p + p'x - (1-p-p') = -1 + 2p + (x+1)p'$ pour V et $-p + p' + (1-p-p')x = x - (x+1)p - (x-1)p'$ pour W . Si une meilleure réponse de Bob a $\{U, V, W\}$ comme support, ces trois options doivent apporter le même gain espéré, c'est-à-dire que $1 + (x-1)p - 2p' = -1 + 2p + (x+1)p' = x - (x+1)p - (x-1)p'$, ou (en soustrayant, disons, le premier membre aux deux autres) :

$$\begin{aligned} -(x-3)p + (x+3)p' &= 2 \\ -2xp - (x-3)p' &= -(x-1) \end{aligned}$$

Le déterminant de ce système est $(x-3)^2 + 2x(x+3) = 3(x^2+3)$ qui est non nul quel que soit x , donc le système est non-dégénéré : la solution $p = p' = \frac{1}{3}$ trouvée en (1) est donc la seule solution.

Bref, on a montré que le seul équilibre de Nash dans lequel les supports des stratégies d'Alice et Bob sont $\{U, V, W\}$ est celui décrit en (1); comme on a vu en (5) que ceci est la seule possibilité de support, il s'agit du seul équilibre de Nash du jeu. ✓