MITRO206
Contrôle de connaissances

Théories des jeux

17 avril 2023

Consignes.

Les exercices sont totalement indépendants. Ils pourront être traités dans un ordre quelconque, mais on demande de faire apparaître de façon très visible dans les copies où commence chaque exercice.

La longueur du sujet ne doit pas effrayer : l'énoncé est long parce que des rappels ont été faits et que la rédaction des questions cherche à éviter toute ambiguïté. De plus, il ne sera pas nécessaire de traiter la totalité pour avoir la note maximale.

L'usage de tous les documents (notes de cours manuscrites ou imprimées, feuilles d'exercices, livres) est autorisé.

L'usage des appareils électroniques est interdit.

Durée : 2h

Barème *indicatif* : $5 + 5 + 5 + 7$ (sur 20)

Cet énoncé comporte 4 pages (page de garde incluse).

Git : `fc5eaa3 Wed Apr 12 22:47:20 2023 +0200`

Exercice 1.

On considère le jeu de nim éventuellement transfini. (On rappelle qu'il est défini de la manière suivante : une position du jeu est un tuple $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ d'ordinaux, on dit qu'il y a « α_i bâtonnets sur la ligne i », et un coup consiste à décroître strictement *un et un seul* des α_i, autrement dit il existe un coup de $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ vers $(\alpha_1, \ldots, \beta, \ldots, \alpha_r)$ où $\beta < \alpha_i$ est mis à la place de α_i.)

Pour chacune des positions suivantes, dire si c'est une position P (c'est-à-dire gagnante pour le joueur qui vient de jouer) ou N (c'est-à-dire gagnante pour le joueur qui doit jouer), et, dans ce dernier cas, donner un coup gagnant possible pour le joueur en question.

(a) $(1, 2, 3)$ (autrement dit, une ligne avec 1 bâtonnet, une ligne avec 2, et une ligne avec 3)

(b) $(3, 6, 9)$

(c) $(\omega, \omega 2, \omega 3)$

(d) $(\omega, \omega^2, \omega^3)$

(e) $(\omega, \omega^\omega, \omega^{\omega^\omega})$

(f) $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ où $\varepsilon_0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \varepsilon_3$ sont les quatre premiers ordinaux [1] vérifiant $\varepsilon = \omega^\varepsilon$.

(g) Donner un exemple de position N du jeu de nim (de préférence fini) avec un nombre distinct de bâtonnets sur chaque ligne (i.e., les α_i sont deux à deux distincts), où il existe strictement plus qu'un coup gagnant pour le joueur qui doit jouer. (Pour indication, ceci est possible à partir de trois lignes de bâtonnets.)

Exercice 2.

Si G est un graphe orienté bien-fondé (qu'on peut considérer comme l'ensemble des positions d'un jeu combinatoire auquel il ne manque que l'information, sans pertinence ici, de la position initiale), on rappelle qu'on a défini la fonction rang

$$\mathrm{rk}(x) := \sup{}^{+}\{\mathrm{rk}(y) : y \in \mathrm{outnb}(x)\} = \sup\{\mathrm{rk}(y) + 1 : y \in \mathrm{outnb}(x)\}$$

(en notant $\sup^+ S$ le plus petit ordinal strictement supérieur à tous les ordinaux de S et $\sup S$ le plus petit ordinal supérieur ou égal à tous les ordinaux de S, et $\mathrm{outnb}(x)$ l'ensemble des voisins sortants de x), et la fonction de Grundy

$$\mathrm{gr}(x) := \mathrm{mex}\{\mathrm{gr}(y) : y \in \mathrm{outnb}(x)\}$$

(où $\mathrm{mex}\, S$ désigne le plus petit ordinal qui n'est pas dans S), — ces définitions ayant bien un sens par induction bien-fondée. La première mesure en quelque sorte la durée du jeu si les deux joueurs coopèrent pour le faire durer aussi longtemps que possible, et la seconde nous donne notamment l'information de quel joueur a une stratégie gagnante.

On va maintenant définir une fonction qui mesure en quelque sorte la durée du jeu si le joueur perdant cherche à perdre aussi lentement que possible tandis que le joueur gagnant cherche à gagner aussi vite que possible. Précisément, on pose

$$\begin{cases} \mathrm{dur}(x) := \sup\{\mathrm{dur}(y) + 1 : y \in \mathrm{outnb}(x)\} & \text{si } \mathrm{gr}(x) = 0 \\ \mathrm{dur}(x) := \min\{\mathrm{dur}(y) + 1 : y \in \mathrm{outnb}(x) \text{ et } \mathrm{gr}(y) = 0\} & \text{si } \mathrm{gr}(x) \neq 0 \end{cases}$$

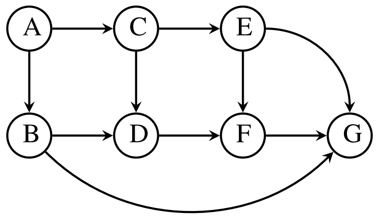
(où $\min S$ désigne le plus petit ordinal de S, si S est un ensemble non-vide d'ordinaux).

(1) Expliquer pourquoi cette définition a bien un sens (on prendra garde au fait que $\min \varnothing$ n'est pas défini).

1. On peut définir ε_{n+1} comme la limite, c'est-à-dire la borne supérieure, de la suite $(u_k)_{k<\omega}$ strictement croissante définie par $u_0 = (\varepsilon_n) + 1$ et $u_{k+1} = \omega^{u_k}$, c'est-à-dire $u_1 = \omega^{(\varepsilon_n)+1}$ et $u_2 = \omega^{\omega^{(\varepsilon_n)+1}}$, etc., mais on n'aura pas besoin de ce fait.

(2) Expliquer rapidement et informellement pourquoi $\mathrm{dur}(x)$ correspond bien à l'explication intuitive qu'on a donnée.

(3) Sur le graphe G représenté ci-dessous, calculer chacune des fonctions rk, gr et dur (les lettres servent simplement à étiqueter les sommets) :



Si on joue à partir du sommet A comme position initiale et que, comme suggéré dans la définition de dur, le joueur perdant cherche à perdre aussi lentement que possible tandis que le joueur gagnant cherche à gagner aussi vite que possible, quelle sera le déroulement du jeu ?

(4) Montrer que, dans n'importe quel graphe G bien-fondé, et pour n'importe quel sommet x de G, on a $\mathrm{dur}(x) \leq \mathrm{rk}(x)$.

Exercice 3.

Soit G un graphe orienté dont l'ensemble des sommets est (au plus) dénombrable, et soit x_0 un sommet de G. (Il n'y a pas d'autre hypothèse sur G, par exemple on ne suppose pas que G est bien-fondé.)

On considère le jeu suivant. Deux joueurs s'affrontent, qu'on appellera *le Fugueur* et *le Borneur*. Le Fugueur commence, après quoi ils jouent tour à tour. En partant de x_0, chaque joueur, quand vient son tour, choisit un voisin sortant de la position actuelle x *ou bien* choisit de conserver x ; autrement dit, il choisit un élément de $\mathrm{outnb}(x) \cup \{x\}$. (Pour être parfaitement clair : au premier tour, le Fugueur choisit $x_1 \in \mathrm{outnb}(x_0) \cup \{x_0\}$, puis le Borneur choisit $x_2 \in \mathrm{outnb}(x_1) \cup \{x_1\}$, et ainsi de suite.) Le jeu dure infiniment longtemps (manifestement, les règles permettent toujours à chaque joueur de faire un coup). Au bout d'un nombre infini de coups, on considère la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de toutes les positions traversées :

— si cette suite est d'image finie (c'est-à-dire que l'ensemble $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ de toutes les positions traversées est fini), alors le Borneur a gagné ;

— sinon, le Fugueur a gagné.

(1) Montrer, en appliquant un des résultats du cours, que l'un des joueurs a nécessairement une stratégie gagnante (on ne demande pas de préciser lequel). On pourra préalablement montrer que pour toute partie $F \subseteq G$, la partie $F^{\mathbb{N}} \subseteq G^{\mathbb{N}}$ est *fermée* (pour la topologie sur $G^{\mathbb{N}}$ produit de la topologie discrète[2]), et en déduire une propriété de l'ensemble $\bigcup_{F \text{ fini} \subseteq G} F^{\mathbb{N}}$ réunion des $F^{\mathbb{N}}$ où F parcourt toutes les parties *finies* de G.

(2) Indépendamment de la question précédente, donner un exemple de couple (G, x_0) pour lequel le Borneur possède une stratégie gagnante à ce jeu. Donner un exemple pour lequel le Fugueur en possède une. (On cherchera à donner des exemples aussi simples que possibles.)

Exercice 4.

On considère une variante *à somme (possiblement) non-nulle* de Pierre-Papier-Ciseaux, à savoir le jeu en forme normale défini par la matrice de gain suivante :

↓Alice, Bob→	U	V	W
U	x, x	$-1, +1$	$+1, -1$
V	$+1, -1$	x, x	$-1, +1$
W	$-1, +1$	$+1, -1$	x, x

2. C'est-à-dire celle qui a été étudiée en cours.

où x est un réel et, pour plus de commodité, on a écrit U pour « Pierre », V pour « Papier » et W pour « Ciseaux ». (La ligne correspond à l'option choisie par Alice, la colonne à l'option de Bob, et chaque case indique le gain d'Alice suivi du gain de Bob.)

Le but de l'exercice est d'étudier les équilibres de Nash de ce jeu.

(On prendra bien note, pour simplifier les raisonnements en cas, du fait que les options ont une symétrie cyclique [3], et que les joueurs ont eux aussi des rôles symétriques.)

(1) Considérons le profil de stratégies mixtes dans lequel les deux joueurs choisissent chacun chaque option avec probabilité $\frac{1}{3}$ (c'est-à-dire la stratégie qui est optimale dans le cas à somme nulle). Pour quelle(s) valeur(s) de x ce profil est-il un équilibre de Nash ?

On suppose dorénavant que $x < -1$.

(2) Existe-t-il un équilibre de Nash dans lequel Alice joue purement U ? (On raisonnera les options pouvant être dans le support de la stratégie de Bob en réponse.) En déduire tous les équilibres de Nash dans lesquels au moins un joueur joue une stratégie pure.

(3) Dans cette question et la suivante, envisageons un équilibre de Nash dans lequel Alice joue la stratégie mixte $pU + (1-p)V$ avec $0 < p < 1$. Supposons dans cette question que Bob réponde avec un une stratégie mixte ayant elle aussi $\{U, V\}$ comme support. Montrer que $p = \frac{x+1}{2x}$ et que le gain de Bob est $\frac{x^2+1}{2x}$. En utilisant le fait que $\frac{x^2+1}{2x} < -\frac{1}{x}$ lorsque $x < -1$ (qu'on admettra pour ne pas perdre son temps en calculs inutiles), en déduire qu'un tel équilibre de Nash n'existe pas.

(4) On considère toujours un équilibre de Nash dans lequel Alice joue la stratégie mixte $pU+(1-p)V$ avec $0 < p < 1$. Supposons maintenant que Bob réponde avec une stratégie mixte ayant (au moins) U et W dans son support support. Montrer que $p = \frac{2}{x+3}$ (et que $x \neq -3$) ; en utilisant le fait que $\frac{2}{x+3} > 1$ lorsque $-3 < x < -1$ et que $\frac{2}{x+3} < 0$ lorsque $x < -3$ (de nouveau, on admettra ces faits pour ne pas perdre de temps en calculs), en déduire qu'un tel équilibre de Nash n'existe pas.

(5) Expliquer soigneusement pourquoi les questions (2) à (4) montrent que dans tout équilibre de Nash du jeu considéré, les deux joueurs jouent une stratégie mixte ayant $\{U, V, W\}$ comme support (i.e., aucun ensemble strictement plus petit n'est possible).

(6) Envisageons maintenant un équilibre de Nash dans lequel Alice joue une stratégie mixte $pU + p'V + (1-p-p')W$ avec $p > 0$, $p' > 0$ et $1-p-p' > 0$ et Bob répond par une stratégie ayant elle aussi $\{U, V, W\}$ comme support. Écrire un système de deux équations linéaires vérifié par p, p', justifier que ce système est non-dégénéré et conclure. Quels sont tous les équilibres de Nash du jeu ?

3. C'est-à-dire que remplacer U par V et V par W et W par U ne change rien au jeu.