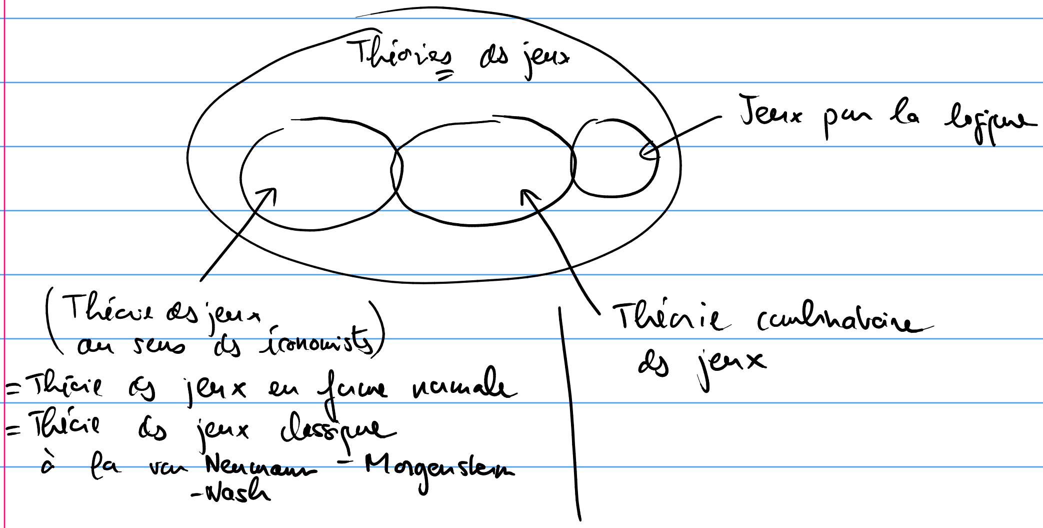
MTRO206 — Théories des jeux

2023-02-13 https://perso.enst.fr/madore/mitro206/notes-mitro206.pdf



1. Introduction et typologie

1.1. Généralités.

Pas une mais plusieurs théories des jeux

Pas une mais plusieurs définitions.

Un jeu implique (en général) un état (→ "position") et des joueurs

Le nombre de joueurs sera en général 2, parfois plus.

L'issue du jeu peut être binaire ("gagné"/"perdu"),
ternaire ("gagné"/"match nul"/"perdu")
ou quantifiée par un score (réel).

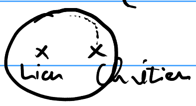
Les intérêts des joueurs sont souvent opposés,
mais parfois pas ou pas complètement (→ jeux coopératifs)

Le jeu peut faire intervenir le hasard
(éventuellement pas dans le jeu lui-même mais dans
les stratégies appliquées par les joueurs)

Les joueurs peuvent ou non avoir connaissance de
l'état complet du jeu.

Si oui + pas de hasard → "jeu à information parfaite"] p. ex. échecs, dames, go, nim

Les joueurs peuvent jouer à tour de rôle, ou simultanément
voire en continu (→ théorie des jeux différentiels) (↳ pas un jeu à information parfaite)



1.2. Quelques types de jeux

- "Jeux à *information parfaite*" : jeux ne faisant pas intervenir de hasard, où les joueurs jouent à tour de rôle, et en ayant connaissance de tout l'état du jeu (toute information pertinente pour faire leur choix).
  ⇝ théorie combinatoire des jeux
- "Jeux à *somme nulle*" (surtout en théorie classique des jeux) : jeux à *deux* joueurs dans lesquels le gain de chacun est l'opposé du gain de l'autre.
- "Jeux *impartiaux*" : jeux dans lesquels la règle du jeu ne distingue pas les deux joueurs. (contraire : "par*tisan*")

1.3. Quelques exemples en vrac.

* Pile ou face : deux joueurs, Pauline et Florent.
On tire une pièce : Pile ⇒ Pauline gagne.
Face ⇒ Florent gagne.

* Variante : Alice choisit "Pile" ou "Face"
Bob tire la pièce.

* Variante : Alice choisit "Pile" ou "Face" *en secret*. ("enveloppe scellée")
Bob choisit si la pièce tombe sur pile ou face

De façon équivalente, les choix ont lieu simultanément.

Tableau des gains :

$\downarrow A \quad \vec{B}$	Pile	Face
Pile	A gagne	B gagne
Face	B gagne	A gagne

Variante équivalente :
Alice choisit "A" ou "B"
Bob choisit "gagne" ou "perd"
(simultanément !)

$\downarrow A \quad \vec{B}$	"gagne"	"perd"
"Alice"	A gagne	B gagne
"Bob"	B gagne	A gagne

Avec gains numériques.

$\downarrow A, \vec{B}$	Pile	Face
Pile	$+1, -1$	$-1, +1$
Face	$-1, +1$	$+1, -1$

↙ chaque case montre le gain d'Alice puis celui de Bob

Ceci constitue une <u>matrice de gains</u> définissant un jeu <u>en forme normale</u> ici à deux joueurs et à somme nulle.

Ici, la stratégie optimale (à définir plus tard) consiste à jouer Pile ou Face avec probabilité $\frac{1}{2}$ chacun, ce qu'on abrégera en $\frac{1}{2}$ Pile + $\frac{1}{2}$ Face.

* Pierre - Papier - Ciseaux : c'est le jeu en forme normale et à somme nulle décrit par la matrice de gains :

↓Alice, Bob→	Pierre	Papier	Ciseaux	$\frac{1}{3}$ Pie + $\frac{1}{3}$ Pap + $\frac{1}{3}$ Cis
Pierre	0, 0	−1, +1	+1, −1	0, 0
Papier	+1, −1	0, 0	−1, +1	0, 0
Ciseaux	−1, +1	+1, −1	0, 0	0, 0

Stratégies pures de Bob

La stratégie optimale ici consiste à jouer chaque option avec probabilité $\frac{1}{3}$, ce qu'on note $\frac{1}{3}$ Pierre + $\frac{1}{3}$ Papier + $\frac{1}{3}$ Ciseaux ("stratégie mixte")

* Pierre - Papier - Ciseaux - Puits

Jeu en forme normale et à somme nulle défini par :

↓A, B→	Pierre	Papier	Ciseaux	Puits	$\frac{1}{3}$ Pap + $\frac{1}{3}$ Cis + $\frac{1}{3}$ Puit
Pierre	0, 0	−1, +1	+1, −1	−1, +1	$-\frac{1}{3}$, $+\frac{1}{3}$
Papier	+1, −1	0, 0	−1, +1	+1, −1	0, 0
Ciseaux	−1, +1	+1, −1	0, 0	−1, +1	0, 0
Puits	+1, −1	−1, +1	+1, −1	0, 0	0, 0

tous ≥ 0

La stratégie optimale de Bob est ici de jouer Papier, Ciseaux et Puits avec proba $\frac{1}{3}$ chacun

Quelques exemples de jeux en forme normale qui ne sont pas à somme nulle.

* Dilemme du prisonnier.

↓A, B→	Coopérer	Défaut
Coopérer	2, 2	0, 4
Défaut	4, 0	1, 1

L'unique équilibre de Nash de ce jeu consiste à ce que les deux joueurs fassent défaut.

Plus généralement, on peut remplacer 4, 2, 1, 0 par quatre réels $T > R > P > S$

"Tentation" "Récompense" "Punition" "Sucker"

* Jeu du "trouillard" ou Colombe / Faucon

stratégie mixte

↓A, B→	(Colombe) Coopérer	(Faucon) Défaut	$\frac{2}{3}$ Colombe + $\frac{1}{3}$ Faucon
(Colombe) Coopérer	2, 2	0, 4	$\frac{4}{3}$, $\frac{8}{3}$
(Faucon) Défaut	4, 0	−4, −4	$\frac{4}{3}$, $-\frac{4}{3}$
$\frac{2}{3}$ Colombe + $\frac{1}{3}$ Faucon	$\frac{8}{3}$, $\frac{4}{3}$	$-\frac{4}{3}$, $\frac{4}{3}$	$\frac{4}{3}$, $\frac{4}{3}$

équilibres de Nash

(aucun joueur n'a intérêt à changer unilatéralement sa stratégie)

On peut remplacer 4, 2, 0, −4 par quatre réels W, T, L, X

Win Truce Loss Crash

* Exemples de jeux à information parfaite.

- Le jeu de nim (archétype du jeu combinatoire)
  (ou jeu de Marienbad)

⊕	0	1
0	0	1
1	1	0

$$\begin{array}{ccr} \mid & 1 & 001 \\ \mid\mid\mid & 3 & \oplus\ 011 \\ \mid\mid\mid\mid\mid & 5 & \oplus\ 101 \\ \mid\mid\mid\mid\mid\mid\mid & 7 & \underline{\oplus\ 111} \\ & & 000 \end{array}$$

valeur de Grundy de la position

Chaque joueur à tour de rôle retire un nombre >0 quelconque de bâtonnets mais d'une ligne seulement.

Qui gagne ? Deux variantes :

- variante "normale" : celui qui retire le dernier bâtonnet gagne
- [• variante "misère" : celui qui retire le dernier bâtonnet perd]

plus "logique"/"naturelle" : "si on ne peut pas jouer on perd" et plus intéressante théoriquement.

Déf : la "valeur de Grundy" d'une position du jeu de nim s'obtient en faisant le XOR (ou exclusif) des nombres de bâtonnets sur chaque ligne écrits en binaire.
noté "⊕" (→ "somme de nim")

La stratégie gagnante au jeu de nim consiste à jouer de façon à annuler la valeur de Grundy de la position (après qu'on a joué)

$$\left.\begin{array}{ccr} \mid & 1 & 001 \\ \mid\mid\mid & 3 & \oplus\ 011 \\ \mid\mid\mid & 3 & \oplus\ 011 \\ \mid\mid\mid\mid\mid\mid\mid & 7 & \underline{\oplus\ 111} \\ & & 110 \end{array}\right]\oplus \longrightarrow 001\quad \begin{array}{rcl} 001 & 1 & \mid \\ \oplus\ 011 & 3 & \mid\mid\mid \\ \oplus\ 011 & 3 & \mid\mid\mid \\ \underline{\oplus\ 001} & 1 & \mid\ \cancel{\mid\mid\mid\mid\mid\mid} \\ 000 & & \end{array}$$

Le second joueur a une stratégie gagnante ←

"Previous"

Position P := position à la valeur de Grundy vaut 0

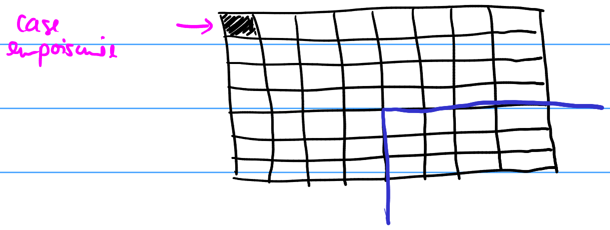
Le 1er joueur a une stratégie gagnante ← Position N := position à la valeur de Grundy vaut ≠0

"Next"

- Depuis une position N, il existe un coup vers une position P.
- Depuis une position P, tout coup mène à une position N.

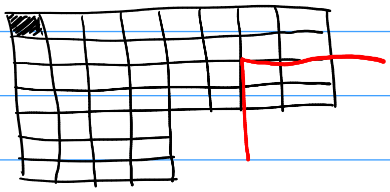
Stratégie : jouer vers une position P.

- Jeu de "Champ" (ou de la gaufre empoisonnée)



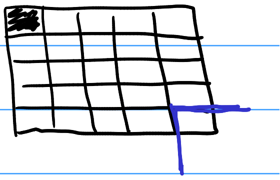
un coup consiste à "manger" un quadrant inférieur droit de la gaufre
(= une case + toutes les cases à droite et/ou en-dessous de celle-ci)

Les joueurs jouent à tour de rôle en "mordant" dans la gaufre, celui qui mange la case empoisonnée a perdu.



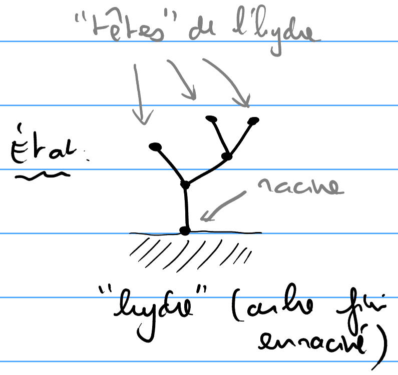
Théorème : à partir d'une gaufre rectangulaire (ou carrée), le premier joueur a une stratégie gagnante.

Preuve : on admet un résultat ultérieur de ce cours (3.5.12), un et un seul des deux joueurs a une stratégie gagnante. Il suffit donc de montrer que le 2d joueur ne peut pas avoir de stratégie gagnante. Supposons par l'absurde qu'il (2d joueur) en ait une σ. Considérons le coup consistant à manger uniquement la case inférieure droite (= opposée à la case empoisonnée) de la gaufre.



La stratégie (σ) supposée gagnante du 2d joueur apporte une réponse à ce coup qui laisse la gaufre dans un certain état G.
Or le 1er joueur aurait pu jouer directement vers G.
Or dans l'état G le joueur qui vient de jouer a une stratégie gagnante.
Donc le 1er joueur a une stratégie gagnante, consistant à jouer vers G puis appliquer σ à partir de là. □

* Jeu d'Hercule et de l'hydre (1.3.14)

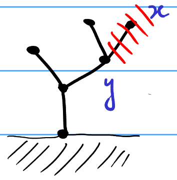


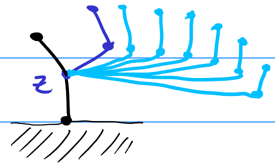
Deux joueurs : Hercule et l'hydre.

But d'Hercule : "terrasser l'hydre = la réduire à sa racine"

But de l'hydre : survivre indéfiniment.

Hercule à chaque tour choisit une tête de l'hydre (x) (= feuille de l'arbre) et la coupe (= efface la feuille et l'arête qui la relie à son parent y dans l'arbre)

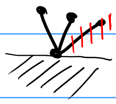




L'hydre réplique en reproduisant tout le sous-arbre qui descend de y en autant de copies qu'elle veut au niveau de z

(x = tête coupée, y = son parent, z = parent de y

N.B : si x est reliée directement à la racine (y = la racine) alors l'hydre ne réplique pas (elle passe son tour)



Théorème : quoi que fassent Hercule et l'hydre, Hercule gagne toujours (= l'hydre est détruite en temps fini).

2023-02-20

Plan général du cours

② Jeux en forme normale ("Théorie des jeux" à la von Neumann – Morgenstern-Nash)
- dilemme du prisonnier
- jeu du trouillard
- pierre-papier-ciseaux

③ Jeux de Gale-Stewart

④ Induction bien-fondée

⑤ Introduction aux ordinaux ← Hercule & l'hydre

⑥ Jeux combinatoires impartiaux (à information parfaite)
- "Théorie de Sprague-Grundy"
- jeu de nim, chomp

⑦ Jeux combinatoires partisans (à inf. parf.)
- "Théorie des jeux à la Conway"
- (⇝ théorie des nombres surréels)

Chapitre 2. Théorie des jeux en forme normale
("Théorie classique des jeux à la von Neumann - Morgenstern - Nash")

(2.0) Rappels sur les convexes

* "Combinaison affine" si $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}^n$

une combinaison affine (des x_i) est un $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_m x_m$ $(\lambda_i \in \mathbb{R})$

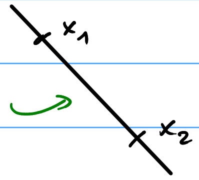
où $\lambda_1 + \dots + \lambda_m = 1$

$\simeq$ "barycentre" de $x_1, \dots, x_m$

avec poids $\mu_1, \dots, \mu_m$

:= la combinaison affine

(combinaisons affines de x_1 et x_2)



$$\frac{\mu_1 x_1 + \dots + \mu_m x_m}{\mu_1 + \dots + \mu_m} \quad (\text{si } \mu_1 + \dots + \mu_m \neq 0)$$

On dit que $x_1, \dots, x_m$ sont affinement indépendants

lorsque $\{(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m : \lambda_1 + \dots + \lambda_m = 1\} \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \longmapsto \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_m x_m$

est injective

C'est équivalent à dire que $x_2 - x_1, \dots, x_m - x_1$ sont linéairement indépendants.

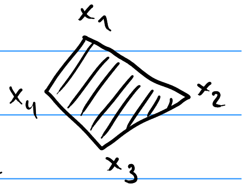
* Combinaison convexe : c'est une combinaison affine à coefficients ≥ 0 (ou un barycentre à poids ≥ 0)

$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_m x_m$

avec $\lambda_1, \dots, \lambda_m \geq 0$ et $\lambda_1 + \dots + \lambda_m = 1$.

On dit que $C \subseteq \mathbb{R}^n$ est convexe

lorsque C est stable par combinaisons convexes.



$$\begin{pmatrix} x_1, \dots, x_m \in C \\ \lambda_1, \dots, \lambda_m \geq 0 \\ \lambda_1 + \dots + \lambda_m = 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_m x_m \in C$$

Par associativité, il suffit de demander que $x, y \in C \Rightarrow [x, y] \subseteq C$

où $[x, y] = \{\lambda x + (1 - \lambda) y \ : \ \lambda \in [0; 1]\}$

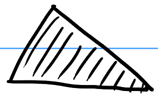
L'enveloppe convexe de $A \subseteq \mathbb{R}^n$: c'est le plus petit convexe contenant A : c'est l'ensemble des combinaisons convexes d'éléments $x_1, \dots, x_m \in A$.

Si A est fini, cette enveloppe convexe s'appelle un *polytope*.

Si A est *affinement indépendant* (forcément fini)

cette enveloppe convexe s'appelle *simplexe*

(d'ensemble de sommets A)



* Une application $u : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^q$ est dite *affine* lorsqu'elle préserve les combinaisons affines

i.e. $u(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_m x_m) = \lambda_1 u(x_1) + \dots + \lambda_m u(x_m)$

si $\lambda_1 + \dots + \lambda_m = 1$.

Il revient au même de dire : $u(x) = v(x) + c$

où $v : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^q$ est linéaire et $c \in \mathbb{R}^q$ est constante. (en fait $c = u(0)$)

Prop (2.0.4) : Si $A \subseteq \mathbb{R}^n$ est fini et $C := \operatorname{Conv}(A)$ (enveloppe convexe de A)

et $u : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ affine

et si $u(a) \leq M$ pour tout $a \in A$

alors $u(x) \leq M$ pour tout $x \in C$

Par conséquent : $\max\limits_{x \in C} u(x)$ existe et vaut $\max\limits_{a \in A} u(a)$

Dém : si $x = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_m a_m$ avec $\lambda_i \geq 0$ et $\lambda_1 + \dots + \lambda_m = 1$

et si $u(a_1) \leq M, \dots, u(a_m) \leq M$

alors $u(x) = \lambda_1 u(a_1) + \dots + \lambda_m u(a_m) \leq \lambda_1 M + \dots + \lambda_m M = M$.

Par conséquent, si $M := \max\limits_{a \in A} u(a)$,

on a $u(x) \leq M$ pour tout $x \in C$

Comme M est atteint en un élément de $A \subseteq C$,

on a bien $M = \max\limits_{x \in C} u(x)$. $\square$

Prop (2.0.5) : dans le contexte qui précède,

soit $M = \max\limits_{a \in A} u(a)$: alors une combinaison convexe x

à coefficients *strictement* positifs

$\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_m a_m$ avec $\begin{pmatrix} \lambda_i > 0 \\ a_i \in A \\ \lambda_1 + \dots + \lambda_m = 1 \end{pmatrix}$

vérifie $u(x) = M$ ssi chacun des a_i vérifie

$u(a_i) = M$. ↳ (dont on a pris la combinaison)

Dém : ... $\square$

Moralité : une fonction affine sur un polytope atteint son maximum en un sommet, et ne peut l'atteindre à l'intérieur d'une face que si elle l'atteint en chaque sommet de cette face.

② 2.1 Généralités sur les jeux en forme normale.

Déf (2.1.1) Un jeu en forme normale à $N \geq 1$ joueurs est la donnée de $A_1, \ldots, A_N$ ensembles finis ($A_i = \{$options du joueur $i\}$)

et de N fonctions $u_1, \ldots, u_N$

$$u_i : \underbrace{A_1 \times \cdots \times A_N}_{=: A} \longrightarrow \mathbb{R}$$

"matrice de gains"

Les éléments de A_i s'appellent options ou stratégies pures du joueur i.

Les éléments de $A := A_1 \times \cdots \times A_N$ s'appellent profils de stratégies pures.

La valeur $u_i(a)$ s'appelle le gain du joueur i dans le profil a.

Déf. (2.1.2) : Si B est un ensemble fini, une "stratégie mixte" sur B (ensemble d'"options") est une fonction $s : B \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $s(b) \geq 0$ pour tout $b \in B$ et $\sum_{b \in B} s(b) = 1$.

On appellera S_B l'ensemble de ces stratégies mixtes.

Le support de $s \in S_B$ est l'ensemble $\{b \in B : s(b) > 0\}$.

Trois points de vue sur les éléments de S_B :

- fonctions $B \longrightarrow \mathbb{R}$ comme ci-dessus.
- mesures de probabilités sur B (mesure de $\{b_1, \ldots, b_m\}$ est $s(b_1) + \cdots + s(b_m)$).
- combinaisons convexes d'éléments de b quitte à identifier $b \in B$ avec $\delta_b : B \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } a = b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

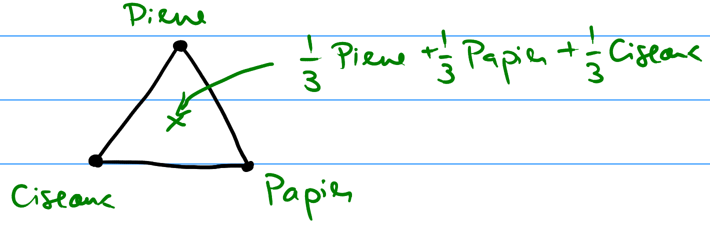
Cette identification $b \longmapsto \delta_b$

permet de considérer $B \subseteq S_B$

alors S_B est bien l'ensemble des combinaisons convexes des éléments de B (c'est-à-dire des δ_b).

(Une fonction $s \in S_B$ s'identifie à la combinaison convexe

$$\underbrace{\sum_{b\in B} s(b)\cdot \boxed{b}}_{\text{combinaisons convexes}} \longrightarrow \left(\text{en fait } \delta_b\right)$$



Pour un jeu comme en 2.1.1

on pose $S_i = S_{A_i} = \{\text{stratégies } \underline{\text{mixtes}} \text{ du joueur } i\}$

$$S = S_1 \times \dots \times S_N = \{\text{profils de stratégies } \underline{\text{mixtes}}\}$$

Notation : $S_{\hat{i}} := S_1 \times \dots \times S_{i-1} \times S_{i+1} \times \dots \times S_N$

({profils de s. mixtes des joueurs $\neq i$})

N.B : un élément de $S = S_1 \times \dots \times S_N$

n'est pas la même chose qu'une distribution de probas

sur $A = A_1 \times \dots \times A_N$

mais il en détermine une de la façon suivante :

si $s \in S = S_1 \times \dots \times S_N$

on peut lui associer une fonction (positive de somme 1)

$$A \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(a_1, \dots, a_N) \longmapsto s_1(a_1) \cdots s_N(a_N) \qquad \text{(produit)}$$

On va identifier $s \in S$ avec l'élément de S_A

qu'on vient d'écrire

(probabilistiquement : les joueurs font des choix indépendants)

Déf (2.1.5) : si $s = (s_1, \dots, s_N) \in S = S_1 \times \dots \times S_N$

on appelle gain espéré du joueur i dans le profil s

le réel

$$u_i(s) := \sum_{(a_1,\dots,a_N)\in A} s_1(a_1) \cdots s_N(a_N)\, u_i(a_1, \dots, a_N)$$

Probabilistement, c'est l'espérance de gain du joueur i si les joueurs jouent indépendamment chacun selon la loi s_i.

C'est l'unique fonction $S_1 \times \dots \times S_N \to \mathbb{R}$ qui est affine en chaque variable (les variables sont les s_i) qui prolonge la fonction $u_i : A_1 \times \dots \times A_N \to \mathbb{R}$ donnée par la matrice de gains.

2.2 Équilibres de Nash.

Déf (2.2.1) si $s_? = (s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_N) \in S_{?i}$ et $s_! \in S_i$ on dit que $s_!$ est une **meilleure réponse** (pour le joueur i) resp. la **meilleure réponse stricte** à $s_?$ lorsque

$$u_i(s_?, s_!) \geq u(s_?, t) \quad \text{pour tout } t \in S_i$$

resp.

$$u_i(s_?, s_!) > u(s_?, t) \quad \text{pour tout } t \neq s_!$$

* Un équilibre de Nash (resp. équilibre de N. strict) est un profil de stratégies mixtes $s \in S$ tel que s_i soit une meilleure réponse (resp. la meilleure réponse stricte) à $s_{?i} = (s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_N) \in S_{?i}$

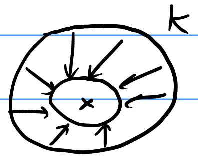
Prop (2.2.2) : si $s_? \in S_{?i}$, il existe une meilleure réponse du joueur i contre $s_?$ qui est une stratégie pure.
De plus, $s_! \in S_i$ est une meilleure réponse contre $s_?$ ssi chacune des options de son support en est une, et alors elles apportent toutes le même gain espéré.
Notamment, si une réponse stricte existe, c'est forcément une stratégie pure.

Dém : reformulation de 2.0.4 et 2.0.5. □

Théorème (2.2.3) (John F. Nash, 1951)

Pour un jeu en forme normale (comme en 2.1.1), il existe (au moins) un équilibre de Nash.

La démonstration repose sur le résultat admis suivant:



Thm (2.2.4) (L. E. J. Brouwer, 1910)

Si K est un convexe compact de $\mathbb{R}^n$

et $T : K \longrightarrow K$ continue, alors T a un point fixe,

c'est-à-dire $\exists x \in K \ (T(x) = x)$

Dém de 2.2.3: si $s \in S = S_1 \times \cdots \times S_N$

on note $s_{?i} = (s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_N)$

et

(si $b \in A_i$) $\varphi_{i,b}(s) := \max(0, u_i(s_{?i}, b) - \underbrace{u_i(s)}_{u_i(s_{?i}, s_i)}) \quad \geq 0$

« augmentation de gain espéré par le joueur i si on remplace sa stratégie (mixte) s_i par la stratégie pure b (et au pire 0). »

Remarque cruciale: s est un équilibre de Nash ssi $\varphi_{i,b}(s) = 0$ pour tous i et b (cf. 2.2.2).

On définit $T : S \longrightarrow S$ comme suit: $T(s) = s^\#$ où $s^\# = (s_1^\#, \dots, s_N^\#)$ où $s_i^\# =$ [barycentre de s_i avec poids 1 et de chaque $b \in A_i$ avec poids $\varphi_{i,b}(s)$]

c'est-à-dire:

$$s_i^\# = \frac{s_i + \sum_{b \in A_i} \varphi_{i,b}(s) \cdot \text{\textcircled{b}}}{1 + \sum_{b \in A_i} \varphi_{i,b}(s)}$$

(rappel: ce b désigne $\delta_b : A_i \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } a = b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$)

Autrement dit, $s_i^\# : A_i \longrightarrow \mathbb{R}$ est donnée par:

$$s_i^\#(a) = \frac{s_i(a) + \varphi_{i,a}(s)}{1 + \sum_{b \in A_i} \varphi_{i,b}(s)} = \frac{s_i(a) + \varphi_{i,a}(s)}{\sum_{b \in A_i} (s_i(b) + \varphi_{i,b}(s))}$$

Cette combinaison $s_i^\#$ est bien définie et appartient à S_i
car c'est une combinaison convexe (poids positifs!)
de s_i et des $b \in A_i$: qui sont tous dans S_i (convexe).

La fonction $T : S \to S$ qu'on vient de définir est
continue (car les $\varphi_{i,b}(s)$ le sont)

Or S est un convexe compact de $\mathbb{R}^{qqch}$.
→ $\#A_1 + \dots + \#A_N$

Donc par le thm de Brouwer (2.2.4),
T a un point fixe $s \in S$.

On va montrer que c'est un équilibre de Nash.

Supposons donc $s = s^\#$. Fixons $i \in \{1, \dots, N\}$.

Remarque : parmi les options du support de s_i,
il y en a une, a, qui minimise $u_i(s_{?i}, a)$

Alors $\varphi_{i,a}(s) = 0$

(pire réponse possible en stratégie pure)

car $u_i(s_{?i}, a) \leq \underbrace{u_i(s_{?i}, s_i)}_{u_i(s)}$

Alors :

$$s_i(a) = s_i^\#(a) = \frac{s_i(a) + \cancel{\varphi_{i,a}(s)}}{1 + \sum_{b \in A_i} \varphi_{i,b}(s)} = \frac{s_i(a)}{1 + \sum_{b \in A_i} \varphi_{i,b}(s)}$$

Comme $s_i(a) > 0$ (on a pris a dans le support de s_i)
c'est que $1 + \sum_{b \in A_i} \varphi_{i,b}(s) = 1$

donc $\varphi_{i,b}(s) = 0$ pour tout b
et ceci vaut pour tout i,
donc s est bien un équilibre de Nash
(cf. "remarque cruciale" plus haut). □

Trouver les équilibres de Nash est algorithmiquement complexe.
Fixons $N = 2$. Il existe un algo ("Lemke – Howson")
généralisant l'algorithme du simplexe, exponentiel dans le pire cas,
mais souvent efficace en pratique.

Méthode simple mais très inefficace (pour trouver les équilibres de Nash si $N=2$) :

- Énumérer tous les supports possibles des stratégies mixtes de chaque joueur : $(2^{\#A_1}-1)\times(2^{\#A_2}-1)$ cas.
- Dans chaque cas, utiliser le fait que toutes les options du support de la stratégie doivent réaliser le même gain espéré (contre la stratégie de l'adversaire). (cf. 2.2.2 / 2.0.5)

Ce qui donne un système d'équations linéaires à résoudre. On doit ensuite vérifier qu'on a bien trouvé un équilibre de Nash.

Ex : jeu du trouillard.

$\downarrow A,\ \overrightarrow{B}$	C	F	$q\in]0;1[$ $qC+(1-q)F$
C	$2,2$	$0,4$	$2q,\ 4-2q$
F	$4,0$	$-4,-4$	$-4+8q,\ -4+4q$
$pC+(1-p)F$ $p\in]0;1[$	$4-2p, 2p$	$-4+4p, -4+8p$	$-4+4p+8q-6pq,$ $-4+8p+4q-6qq$

ne peut pas donner un équilibre de Nash car $2\neq 4$

ne peut pas donner un équilibre de Nash car $0\neq -4$

équilibre de Nash ?

$\Rightarrow 2q=-4+8q \Rightarrow q=\frac{2}{3}$

$2p=-4+8p \Rightarrow p=\frac{2}{3}$

On vérifie que c'est bien un équilibre de Nash

2.3 Jeux à somme nulle : le théorème du minimax.

Déf Jeu à somme nulle : $N=2$ et $u_2 = -u_1$

Donc on se contente d'écrire $u = u_1 = -u_2$ dans le tableau.

Bref, Alice cherche à maximiser u,
Bob à le minimiser.

Rque : si A_1 et A_2 sont deux ensembles finis
et $u : A_1 \times A_2 \to \mathbb{R}$ ("tableau de nombres")
alors

$$\underbrace{\max_{a\in A_1} \min_{b\in A_2} u(a,b)}_{\text{gain si Alice joue \underline{avant} Bob}} \leqslant \underbrace{\min_{b\in A_2} \max_{a\in A_1} u(a,b)}_{\text{gain si Bob joue \underline{avant} Alice}}$$

cette égalité est stricte en général.

Thm ("minimax" de von Neumann, 1928)

$$\max_{x\in S_1} \min_{y\in S_2} u(x,y) = \min_{y\in S_2} \max_{x\in S_1} u(x,y)$$

(où S_1, S_2 ont été définis avant, et u en 2.1.5).

Dém : ces min et max existent bien (par 2.0.4 et $x \mapsto \min_y u(x,y)$ continue, etc.)

Montrons que max min $\leqslant$ min max (inégalité "facile").

Soit x_* réalisant $\max_x \min_y$
y_* réalisant $\min_y \max_x$. Alors :

$$\max_x \min_y u(x,y) = \min_y u(x_*,y) \underset{\text{déf. du min}}{\leqslant} u(x_*,y_*) \underset{\text{déf du max}}{\leqslant} \max_x u(x,y_*) = \min_y \max_x u(x,y)$$

Ceci démontre $\max_x \min_y \leqslant \min_y \max_x$.

Montrons l'inégalité de sens contraire.

Soit (x_0, y_0) un équilibre de Nash.

$$\max_x \min_y u(x,y) \overset{\text{déf. du max}}{\geq} \min_y u(x_0,y) = u(x_0,y_0) = \max_x u(x,y_0) \overset{\text{déf. du min}}{\geq} \min_y \max_x u(x,y)$$

y_0 est une meilleure réponse de Bob contre x_0

x_0 est une meilleure réponse d'Alice contre y_0

Ce qui démontre max min ≥ min max.

$$\text{Bref,} \quad \max_x \min_y u(x,y) = \min_y \max_x u(x,y) \qquad \square$$

2023-03-06

Déf. dans un jeu à somme nulle, la quantité

$$\max_{x\in S_1} \min_{y\in S_2} u(x,y) = \min_{y\in S_2} \max_{x\in S_1} u(x,y)$$

s'appelle la valeur du jeu à somme nulle.

- Une stratégie mixte du joueur 1 qui réalise ce max s'appelle stratégie optimale de ce joueur.
- Une stratégie mixte du j. 2 qui réalise ce min s'appelle stratégie optimale du joueur 2.

Prop (2.34): Pour un jeu à somme nulle:

(i) (x_0,y_0) est un équilibre de Nash ssi x_0 est une stratégie optimale du joueur 1 et y_0 est une stratégie optimale du joueur 2

(ii) Tous les équilibres de Nash ont le même gain espéré: c'est la valeur du jeu.

(iii) $x_0 \in S_1$ est optimale ssi $u(x_0, b) \geq v$ pour tout $b \in \overset{\text{stratégies pures}}{A_2}$ (où v est la valeur du jeu), et symétriquement pour l'autre joueur

(iv) L'ensemble T_1 des stratégies optimales du joueur 1 est un convexe. Idem pour le joueur 2. (D'après (i), les équilibres de Nash sont $T_1 \times T_2$).

(v) Si le jeu est symétrique, c'est-à-dire $A_2 = A_1$ et $u(b,a) = -u(a,b)$ alors la valeur du jeu vaut 0.

Esquisse de démonstration :

(i) Reprendre les inégalités de la démonstration de 2.3.1 avec (x_0, y_0) un équilibre de Nash ; il réalise min max et max min, et réciproquement, si (x_*, y_*) réalisent min max et max min, c'est un équilibre de Nash.

(ii) Découle immédiatement de (i)

(iii) x_0 est optimale ssi $\min_{y \in S_2} u(x_0, y) \geq v$

$$\text{par 2.0.4} \longrightarrow \quad \min_{y \in S_2} u(x_0,y) = \min_{b \in A_2} u(x_0, b)$$

(iv) Par symétrie (échanger les deux joueurs). □

Algorithme pour calculer "la" stratégie optimale (d'Alice).

par optimisation linéaire :

- variables : x_a pour chaque $a \in A_1$ et $v \in \mathbb{R}$ ($\#A_1 + 1$ variables)
- contraintes : $(\forall a \in A_1)$ $x_a \geq 0$

$$\sum_{a \in A_1} x_a = 1$$

$$(\forall b \in A_2) \quad v \leq \boxed{\sum_{a \in A_1} \underbrace{u(a,b)}_{\text{matrice des gains}} x_a} \to \text{c'est } u(x,b)$$

- objectif : maximiser v

Pb. de programmation linéaire avec $\#A_1 + 1$ variables dont $\#A_1$ positives avec $\#A_2$ inégalités affines + 1 égalité.

Mise sous forme normale, ie.

$$\text{" maximiser } \underset{\text{vecteur ligne}}{p} \cdot \underset{\text{vecteur colonne}}{x} \text{ sous les contraintes } x \geq 0 \text{ et } \underset{\text{matrice rectangulaire}}{M} x \leq \underset{\text{vecteur colonne}}{q} \text{ "}$$

Pour ça, on écrit $v = v_+ - v_-$ avec $v_+ \geq 0$ et $v_- \geq 0$

et on écrit

$\sum_{a \in A_1} x_a = 1$ comme deux inégalités

$$\sum_{a \in A_1} x_a \leq 1 \quad \text{et} \quad -\sum_{a \in A_1} x_a \leq -1$$

Bref, sous forme normale:

Variables: v_+, v_-, et x_a pr $a \in A_1$
tous ≥ 0

contraintes: $\sum_{a\in A_1} x_a \leq 1$

$$-\sum_{a\in A_1} x_a \leq -1$$

$$(\forall b \in A_2) \quad v_+ - v_- - \sum_{a\in A_1} u(a,b)\, x_a \leq 0$$

Bref,

$$M = \underbrace{\left.\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & -1 \\ 1 & -1 & & & \\ \vdots & \vdots & & \boxed{-u(a,b)} & \\ 1 & -1 & & & \end{pmatrix}\right\}\#A_2+2}_{\#A_1+2} \qquad x = \left.\begin{pmatrix} v_+ \\ v_- \\ \boxed{x_a} \end{pmatrix}\right\}\#A_1+2$$

$$p = (\underbrace{1, -1, \boxed{0 \cdots 0}}_{\#A_1+2}) \qquad q = \left.\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \boxed{\begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}} \end{pmatrix}\right\}\#A_2+2$$

On appelle alors "problème dual" le problème:

- minimiser $\underbrace{{}^t q}_{\text{vecteur-ligne transposé de } q} \cdot \underbrace{y}_{\text{vecteur-colonne}}$ avec les contraintes: ${}^t M \cdot y \geq {}^t p$ et $y \geq 0$

Posons $y = \left.\begin{pmatrix} w_+ \\ w_- \\ \boxed{y_b} \end{pmatrix}\right\}\#A_2+2$ il devient:

$$w_+,\ w_-,\ \overset{(b\in A_2)}{y_b} \geq 0$$

$$\sum_{b\in A_2} y_b \geq 1, \quad -\sum_{b\in A_2} y_b \geq -1$$

$$w_+ - w_- - \sum_{b\in A_2} u(a,b)\, y_b \geq 0$$

C'est un problème exactement identique au précédent mais en regardant le même jeu du point de vue de Bob: le problème dual de la recherche d'une stratégie optimale d'Alice donne la stratégie optimale de Bob.

2023-03-06 (suite)

Chapitre 3

Jeux $\overbrace{\text{de Gale-Stewart}}^{\text{jeux à information parfaite}}$ et détermination

3.1

Ce sont des jeux infinis à information parfaite à issue binaire (soit Alice gagne soit Bob gagne)

Pour définir un jeu de G-S, on se donne :

X un ensemble non vide ("d'options")

$A \subseteq X^{\mathbb{N}}$ un ensemble de suites à valeurs dans X.

$X^{\mathbb{N}} \to$ {suites $\mathbb{N} \to X$}

Le jeu $G_X(A)$:

Alice choisit $x_0 \in X$
Bob choisit $x_1 \in X$
Alice choisit $x_2 \in X$
Bob choisit $x_3 \in X$
⋮
} durée infinie

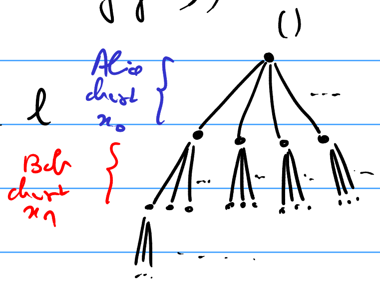
"À la fin" on obtient une suite $\underline{x} := (x_0, x_1, x_2, x_3, \dots) \in X^{\mathbb{N}}$

Si $\underline{x} \in A$, alors Alice a gagné

Sinon, Bob a gagné.

Terminologie : $\underline{x} \in X^{\mathbb{N}}$ s'appelle une confrontation "partie" (du jeu).
(A = {confrontations où Alice gagne})

Une suite finie $\underline{x} = (x_0, \dots, x_{\ell-1}) \in X^{\ell}$ s'appellera une position du jeu (de longueur ℓ = le nombre de coups joués).



Position initiale = la position de longueur 0.
Notée $()$ (suite de longueur 0)

Le jeu ainsi défini sera noté $G_X(A)$ ou $G_X^a(A)$ (où "a" rappelle que Alice commence).

On note $G_X^b(A)$ le jeu identique mais où Bob commence.
(mais toujours Alice cherche à ce que la suite soit dans A).

Rque : $G_X^b(A)$ peut s'identifier à $G_X^a(\underbrace{X^{\mathbb{N}} \setminus A}_{\text{(complémentaire de } A)})$ quitte à échanger les noms des joueurs.

Le "joueur qui doit jouer" dans la position $\underline{x}$ de longueur ℓ est : Alice si ℓ est pair, Bob si ℓ est impair ← (pour G_X^a)

(Alice si ℓ est impair, Bob si ℓ est pair ← pour G_X^b)

Le "joueur qui vient de jouer" est l'autre joueur.

(même dans la position ()).

Une **stratégie** pour Alice dans G_X^a est une fonction

$$\sigma : \underbrace{\left(\bigcup_{m=0}^{+\infty} X^{2m}\right)}_{\text{Positions où Alice doit jouer}} \longrightarrow X$$

de même, une stratégie pour Bob

$$\tau : \left(\bigcup_{m=0}^{+\infty} X^{2m+1}\right) \longrightarrow X$$

et mutatis mutandis pour G_X^b.

On dit que la confrontation $\underline{x} = (x_0, x_1, \dots) \in X^{\mathbb{N}}$ a été jouée selon σ par Alice (que Alice a joué selon σ) dans G_X^a lorsque

$$\forall m \in \mathbb{N} \left(x_{2m} = \sigma(x_0, \dots, x_{2m-1}) \right)$$

↑ y compris $x_0 = \sigma(())$

Et de même Bob a joué selon τ lorsque

$$\forall m \in \mathbb{N} \left(x_{2m+1} = \tau(x_0, \dots, x_{2m}) \right)$$

Mutatis mutandis pour G_X^b.

Remarque: si σ est une stratégie d'Alice et τ de Bob il existe une unique confrontation notée $\sigma * \tau$ où Alice joue selon σ et Bob selon τ.

(Par récurrence, $x_{2m} = \sigma(x_0, \dots, x_{2m-1})$
$x_{2m+1} = \tau(x_0, \dots, x_{2m})$)

Déf: une stratégie σ pour Alice est dite gagnante (pour Alice) lorsque $\underline{x} \in A$ pour toute confrontation $\underline{x}$ où Alice suit σ.

De même, τ gagnante pour Bob signifie

$\underline{x} \notin A$ pour tout $\underline{x}$ où Bob suit τ.

stratégie gagnante

Rques: si Alice a une s.g. als Bob n'en a pas:
(si σ est gagnante pr Alice et τ pr Bob
als $\sigma * \tau \in A$ et $\sigma * \tau \notin A$
contradiction).

Déf: $G_X(A)$ est dit déterminé lsque l'un des joueurs a une stratégie gagnante.

Question: est-ce toujours le cas? NON.
Mais on va s'intéresser à des cas positifs.

Si $\underline{x} = (x_0, \dots, x_{\ell-1}) \in X^\ell$ est une position de G_X, on peut considérer le jeu joué "à partir de là", noté $G_X^{\boxed{a}}(\underline{x}, A)$, c'est-à-dire que les ℓ premiers coups sont imposés (ou déjà joués) à $x_0, \dots, x_{\ell-1}$.

Alice joue x_0

Le joueur qui fait le premier "vrai" choix x_ℓ est donc Alice si ℓ est pair et Bob si ℓ impair.
Mutatis mutandis pr le jeu $G_X^b(\underline{x}, A)$.

Autre présentation du même jeu: appelons

$$\varphi_{\underline{x}} : X^{\mathbb{N}} \longrightarrow X^{\mathbb{N}}$$
$$\underline{\underline{z}} \longmapsto \underline{x}\,\underline{\underline{z}} := (x_0, \dots, x_{\ell-1}, z_0, z_1, \dots)$$

("concaténation de $\underline{x}$ et $\underline{z}$)

Alice gagne la confrontation $\underline{x}\,\underline{\underline{z}}$ à $G_X^a(\underline{x}, A)$ lsque $\underline{x}\,\underline{\underline{z}} \in A$, mais ceci revient au même que de jouer seulement la suite $\underline{\underline{z}}$ et als Alice gagne lsque $\underline{\underline{z}} \in \varphi_{\underline{x}}^{-1}(A) =: A'$ (ou $\underline{x}^{\$}A$)
Le jeu $G_X^a(\underline{x}, A)$ peut donc s'identifier à $G_X^a(A')$ si ℓ est pair
ou $G_X^b(A')$ si ℓ est impair.

Déf: la position $\underline{x} \in X^\ell$ est dite gagnante pr Alice (resp. gagnante pr Bob) au jeu $G_X^a(A)$ lsque Alice (resp. Bob) a une stratégie gagnante dans le jeu $G_X^a(\underline{x}, A)$. Mutatis mutandis pr G_X^b.

Bref, "gagnante pr Alice" = "Alice a une s.g. à partir de là"
"gagnante pr Bob" = "Bob a une s.g. à partir de là"

Prop (3.1.8) : dans $G_X^a(A)$:

- Alice a une s.g. ssi il existe $\exists$ $x_0 \in X$ tel que la position (x_0) soit gagnante pr Alice
  "Alice a une s.g. au jeu $G_X^a((x_0), A)$"

joueur qui commence

- Bob a une s.g. ssi quel que soit $\forall$ $x_0 \in X$ la position (x_0) est gagnante pour Bob
  "Bob a une s.g. au jeu $G_X^a((x_0), A)$"

joueur qui ne commence pas

Reformulation (3.1.9) dans un jeu de G-S :

- une position $\underline{z}$ est gagnante pr le joueur qui doit jouer ssi il existe $\exists$ un coup $x \in X$ tel que la position $\underline{z}x$ soit gagnante pour ce joueur (qui vient de jouer)
- une position $\underline{z}$ est gagnante pr le joueur qui vient de jouer ssi quel que soit $\forall$ le coup $x \in X$, la position $\underline{z}x$ est gagnante pour ce joueur (qui doit maintenant jouer).

$(z_0, \dots, z_{\ell-1}, x)$ concaténation de $\underline{z}$ et x (si $\underline{z} = (z_0, \dots, z_{\ell-1})$)

Dit autrement. si c'est à Alice de jouer dans la position $\underline{z}$,
alors $\underline{z}$ gagnante pr Alice $\iff \exists x \in X$ ($\underline{z}x$ gagnante pr Alice)
$\underline{z}$ gagnante pr Bob $\iff \forall x \in X$ ($\underline{z}x$ gagnante pr Bob)
Et symétriquement en échangeant Alice et Bob.

Rqe (3.1.10) : dans $G_X^a(A)$

Alice a une s.g. $\iff$ $()$ est gagnante pr Alice
$\iff \exists x_0 \in X$ ((x_0) est gagnante pr Alice)
$\iff \exists x_0 \in X\ \forall x_1 \in X$ ((x_0, x_1) est gagnante pr Alice)
$\iff \exists x_0 \in X\ \forall x_1 \in X\ \exists x_2 \in X$ ((x_0, x_1, x_2) gagnante pr Alice)
"etc."

On peut être tenté d'introduire la notation / définition :

$$\exists x_0 \in X \ \forall x_1 \in X \ \exists x_2 \in X \ \forall x_3 \in X \ \cdots \ (\underline{x} \in A)$$

pour signifier "Alice a une s.g. au jeu $G_X^a(A)$".

Dans ce cas, "Alice n'a pas de s.g. à $G_X^a(A)$" s'écrirait :

négation logique $\longrightarrow$

$$\neg \ \exists x_0 \in X \ \forall x_1 \in X \ \exists x_2 \in X \ \forall x_3 \in X \ \cdots \ (\underline{x} \in A)$$

$$\forall x_0 \in X \ \neg \ \forall x_1 \in X \ \exists x_2 \in X \ \forall x_3 \in X \ \cdots \ (\underline{x} \in A)$$

$$\forall x_0 \in X \ \exists x_1 \in X \ \neg \ \exists x_2 \in X \ \forall x_3 \in X \ \cdots \ (\underline{x} \in A)$$

$$\forall x_0 \in X \ \exists x_1 \in X \ \forall x_2 \in X \ \neg \ \forall x_3 \in X \ \cdots \ (\underline{x} \in A)$$

$$\vdots$$

Au bout d'un nombre infini de quantificateurs on aurait

$$\forall x_0 \in X \ \exists x_1 \in X \ \forall x_2 \in X \ \exists x_3 \in X \ \cdots \ (\underline{x} \notin A)$$

ce qui signifie exactement "Bob a une s.g. au jeu $G_X^a(A)$".

Moralité : l'affirmation "si Alice n'a pas de s.g. à $G_X^a(A)$ als Bob en a une" (qui n'est pas valable en général) (i.e. "$G_X^a(A)$ est déterminé") signifie informellement qu'on peut faire traverser à une négation une infinité de quantificateurs alternés (en inversant $\forall$ et $\exists$).

Mais ceci n'est pas justifié rigoureusement.

On va trouver des cas favorables où $G_X^a(A)$ est facilement déterminé en suivant cette intuition.

3.2 Topologie produit sur $X^{\mathbb{N}}$ ($X \neq \emptyset$ quelconque)

Déf : (3.2.1) si $\underline{x} = (x_0, x_1, x_2, \dots) \in X^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{N}$

on notera $V_\ell(\underline{x}) := \{\underline{z} \in X^{\mathbb{N}} : \underline{z}$ commence par les mêmes ℓ premiers termes que $\underline{x}\}$

$$= \{\underline{z} \in X^{\mathbb{N}} : \forall i < \ell \ (z_i = x_i)\}$$

On l'appellera "ℓ-ième voisinage fondamental de $\underline{x}$ ds $X^{\mathbb{N}}$"

(penser à une boule de taille $2^{-\ell}$ centrée en $\underline{x}$)

Rque : si $\ell_1 \leq \ell_2$ als $V_{\ell_1}(\underline{x}) \supseteq V_{\ell_2}(\underline{x})$.

En fait $V_\ell(\underline{x})$ ne dépend que de $(x_0, \dots, x_{\ell-1})$ donc on peut définir de façon évidente $V_\ell(\underline{x})$ si $\underline{x} \in X^n$ avec $n \geq \ell$.

On le notera $V(\underline{x})$ simplement si $\underline{x} \in X^{\ell}$

Bref, $V(\underline{x}) = \{$suites infinies qui commencent par $\underline{x}\}$

Déf: si $U \subseteq X^{\mathbb{N}}$, et $\underline{x} \in X^{\mathbb{N}}$ on dit que U est un *voisinage* de $\underline{x}$ lorsque $\exists \ell \in \mathbb{N} \, (V_\ell(\underline{x}) \subseteq U)$

(i.e. U contient un certain voisinage fondamental de $\underline{x}$).

On dit que $U \subseteq X^{\mathbb{N}}$ est un *ouvert*

ssi U est un voisinage de chacun de ses points, ie.

$$\forall \underline{x} \in U \;\; \exists \ell \in \mathbb{N} \;\; (V_\ell(\underline{x}) \subseteq U)$$

$\forall \underline{x} \in U \;\; \exists \ell \in \mathbb{N} \;\; \forall \underline{z} \in X^{\mathbb{N}}$ (si $\underline{z}$ a les mêmes ℓ premiers termes que $\underline{x}$, alors $\underline{z} \in U$)

Autrement dit, si U contient une suite $\underline{x}$, il doit contenir toute suite qui commence par les mêmes ℓ premiers termes que $\underline{x}$ pour un certain ℓ (qui dépend de $\underline{x}$).

On dit que $F \subseteq X^{\mathbb{N}}$ est *fermé* lorsque son complémentaire est ouvert.

Remarque: $V_\ell(\underline{x})$ est un ouvert

[En effet, si $\underline{y} \in V_\ell(\underline{x})$ alors $V_\ell(\underline{y}) = V_\ell(\underline{x})$.]

Mais c'est aussi un fermé.

[En effet, si $U := X^{\mathbb{N}} \setminus V_\ell(\underline{x})$ est son complémentaire, si $\underline{y} \in U$, il existe $i < \ell$ tel que $y_i \neq x_i$. Alors on a $V_\ell(\underline{y}) \cap V_\ell(\underline{x}) = \emptyset$ donc $V_\ell(\underline{y}) \subseteq U$.]

Exercice: $\{\underline{x}\}$ est fermé quel que soit $\underline{x} \in X^{\mathbb{N}}$, mais (si $\# X \geq 2$) cet ensemble n'est pas ouvert.

Prop (3.2.3) (i) $\emptyset$ et $X^{\mathbb{N}}$ sont ouverts

(ii) Une réunion *quelconque* d'ouverts est un ouvert

(iii) Une intersection *finie* d'ouverts est un ouvert.

Dém. (i) est trivial.

(ii) Si $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ avec U_i ouvert et si $\underline{x} \in U$

il existe $i \in I$ tel que $\underline{x} \in U_i$,

et comme U_i est ouvert, il existe l tq. $V_l(\underline{\underline{x}}) \subseteq U_i$,
mais alors $V_l(\underline{\underline{x}}) \subseteq U$. Donc U est ouvert.

(iii) Par récurrence, il suffit de montrer que $U_1 \cap U_2$ est ouvert si U_1 et U_2 le sont. Soit $U := U_1 \cap U_2$.

Soit $\underline{\underline{x}} \in U$: on a $\underline{\underline{x}} \in U_1$ donc il existe $l_1 \in \mathbb{N}$ tel que $V_{l_1}(\underline{\underline{x}}) \subseteq U_1$ (car U_1 ouvert)

de même, $\underline{\underline{x}} \in U_2$ donc il existe $l_2 \in \mathbb{N}$ tel que $V_{l_2}(\underline{\underline{x}}) \subseteq U_2$ (car U_2 ouvert)

Soit $l = \max(l_1, l_2)$: on a

$$V_l(\underline{\underline{x}}) \subseteq V_{l_1}(\underline{\underline{x}}) \subseteq U_1$$
$$V_l(\underline{\underline{x}}) \subseteq V_{l_2}(\underline{\underline{x}}) \subseteq U_2$$

donc $V_l(\underline{\underline{x}}) \subseteq U_1 \cap U_2 = U$. Donc U ouvert. □

Pour un jeu de G-S, $G_X(A)$, dire que A est ouvert signifie $\forall \underline{\underline{x}} \in A \ \exists l \in \mathbb{N} \ (V_l(\underline{\underline{x}}) \subseteq A)$
autrement dit si Alice gagne une confrontation $\underline{\underline{x}}$,
il existe un coup l tel que
Alice a "gagné à partir du coup l"
(au sens où quoi que fassent les joueurs,
Alice a forcément gagné)

Symétriquement, "A fermé" signifie "si Bob gagne la confrontation, il la gagne au bout d'un nombre fini de coups".

3.3 Détermination des jeux ouverts (et des jeux fermés)

Thm (3.3.1) (D. Gale & F. M. Stewart, 1953)

Si $A \subseteq X^{\mathbb{N}}$ est ouvert ou bien fermé, alors le jeu $G_X^a(A)$ et le jeu $G_X^b(A)$ sont déterminés, c'est-à-dire qu'un des joueurs a une stratégie gagnante.

⚠ On ne dit pas lequel.

"on peut supposer"

Dém : quitte à échanger les deux joueurs, o.p.s. A ouvert.
(en contrepartie, on doit traiter à la fois le cas G_X^a et le cas G_X^b).

On suppose qu'Alice n'a pas de s.g.,
et on va montrer que Bob en a une.

Idée: on va construire une stratégie τ "non perdante" pour Bob,
i.e. Bob va éviter les positions gagnantes pour Alice,
comme le jeu est ouvert, Alice gagne en temps fini
si elle gagne, et ici ça ne se produira pas.

2023-03-13 * Définissons τ stratégie de Bob:

soit $\underline{x} = (x_0, \dots, x_{\ell-1})$ une position où c'est à Bob de jouer,

- qui n'est pas gagnante pour Alice.

D'après la contraposée de (3.1.9) (2e point),
il existe un coup $t \in X$ (coup de Bob)
tel que $\underline{x}t = (x_0, \dots, x_{\ell-1}, t)$ ne soit pas gagnante pour A.
Choisissons un tel t, et posons $\tau(\underline{x}) = t$

(• si $\underline{x}$ est gagnante pour Alice, $(\uparrow\ \tau(x_0, \dots, x_{\ell-1}) = t)$
soit $\tau(\underline{x})$ quelconque — n'intervient pas).

* Affirmation: si Bob joue selon τ, alors Bob gagne
(i.e. τ est une stratégie gagnante pour Bob).

Pour le voir supposons $\underline{x} = (x_0, x_1, x_2, \dots) \in X^{\mathbb{N}}$
est une confrontation où Bob a joué selon τ.
(On veut voir que $\underline{x} \notin A$.)

Montrons que $(x_0, \dots, x_{\ell-1})$ n'est pas gagnante pour Alice,
par récurrence sur ℓ.

- Si $\ell = 0$: c'est la position initiale, supposée non gagnante pour A.
- Si c'est à Bob de jouer dans $(x_0, \dots, x_{\ell-1}) =: \underline{x}$,
par HR celle-ci n'est pas gagnante pour Alice,
alors $x_\ell = \tau(\underline{x})$ car Bob joue selon τ
donc $(x_0, \dots, x_{\ell-1}, x_\ell) = \underline{x}\, x_\ell$ n'est pas gagnante pour A
par la définition de τ.
- Si c'est à Alice de jouer dans $(x_0, \dots, x_{\ell-1}) =: \underline{x}$,
par HR celle-ci n'est pas gagnante pour Alice,
par contraposée de (3.1.9) (1er point), quel que soit
$x_\ell \in X$, la position $(x_0, \dots, x_{\ell-1}, x_\ell) = \underline{x}\, x_\ell$

n'est pas gagnante pour Alice.

Supposons par l'absurde $\underline{\underline{x}} \in A$.

Comme A est <u>ouvert</u>, il existe $\ell \in \mathbb{N}$ tel que $V_\ell(\underline{\underline{x}}) \subseteq A$, c'est-à-dire, toute confrontation commençant par $(x_0, \dots, x_{\ell-1})$ est dans A, donc gagnée par Alice.

Donc Alice a une s.g. dans cette position $(x_0, \dots, x_{\ell-1})$.

Ceci est une contradiction. Donc en fait $\underline{\underline{x}} \notin A$.

C'est-à-dire que Bob gagne.

Donc τ est gagnante pour Bob. $\square$

<u>Remarques</u>:

- Il existe des jeux (de G-S) qui ne sont pas déterminés.
- Il existe des jeux de G-S déterminés qui ne sont ni ouverts ni fermés.

  Par ex., si A est <u>dénombrable</u>, il est facile de voir que (si $\# X \geq 2$) Bob a une s.g. par "argument diagonal" : si $A = \{ \underline{\underline{a}}^{(i)} : i \in \mathbb{N} \}$, au ℓ-ième coup de Bob, Bob joue un élément de X distinct de l'élément correspondant de $\underline{\underline{a}}^{(\ell)}$.

<u>Déf</u>: • une <u>tribu</u> sur un ensemble Z est une partie $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(Z)$ (ensemble des parties de Z) qui est stable par passage au complémentaire et réunions dénombrables, et qui contient $\emptyset$.

(i.e.
- $\emptyset \in \mathcal{T}$
- si $E \in \mathcal{T}$ alors $(Z \setminus E) \in \mathcal{T}$
- si $E_n \in \mathcal{T}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ alors $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \in \mathcal{T}$)

- Une intersection quelconque de tribus est une tribu donc il existe une plus petite tribu contenant une partie $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{P}(Z)$ quelconque, on l'appelle "tribu engendrée par $\mathcal{H}$".
- La tribu engendrée par les ouverts de $Z = X^{\mathbb{N}}$ (ou $\mathbb{R}$ ...) est appelée "tribu borélienne" sur Z

et ses éléments s'appellent les "parties boréliennes".
Bref les boréliens sont "tout ce qui s'obtient à partir des ouverts / fermés par passage au complémentaire et par unions / intersections dénombrables".

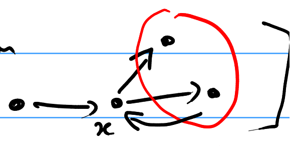
Thm: (3.3.4) (D. Martin, 1975) : si $A \subseteq X^{\mathbb{N}}$ est borélien alors les jeux $G_X^a(A)$ et $G_X^b(A)$ sont déterminés.
(Théorème de détermination borélienne)
(Admis).

3.4. Détermination des jeux combinatoires.

Déf (3.4.1) un "jeu combinatoire" est la donnée de (G, x_0) où
G est un graphe orienté (pas forcément fini)
↪ i.e. un ensemble G de sommets
et un ensemble $E \subseteq G \times G$ de couples d'éléments de G, appelés "arêtes".
et $x_0 \in G$ un sommet appelé "position initiale" du jeu.
Les $\left(\begin{matrix}\text{éléments}\\ \text{sommets}\end{matrix}\right)$ de G s'appellent "positions" du jeu.

Le jeu se joue ainsi : Alice choisit $x_1 \in G$ tq. $(x_0, x_1) \in E$
Bob choisit $x_2 \in G$ tq. $(x_1, x_2) \in E$
Alice choisit $x_3 \in G$ tq. $(x_2, x_3) \in E$
etc.

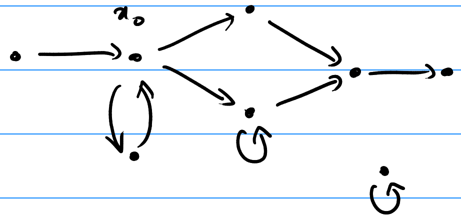
[**Déf:** un sommet y tq. $(x,y) \in E$ s'appelle un "voisin suivant" de $x \in G$.]



Le joueur qui ne peut pas jouer a perdu
(autrement dit, son adversaire a gagné).
Si la confrontation dure infiniment longtemps, elle est dite nulle

Bref, trois issues possibles :

- Alice gagne parce que Bob ne peut pas jouer (en temps fini)
- Bob gagne parce que Alice ne peut pas jouer (en temps fini)
- la confrontation est nulle (en temps infini).



Question : y a-t-il forcément

- soit une s.g. pour Alice
- soit une s.g. pour Bob
- soit une stratégie assurant au moins le nul aux deux joueurs ?

Réponse : oui.

On va le montrer en se ramenant aux jeux de G-S.

Soit (G, x_0) un jeu combinatoire : on définit trois parties A, B et D de $G^{\mathbb{N}_{>0}} = \{$suites d'éléments de G indicées par $\mathbb{N}_{>0} = \{1,2,3,\dots\}\}$ et deux jeux de G-S ainsi :

la règle du jeu combinatoire a toujours été respectée

- $D \subseteq G^{\mathbb{N}_{>0}}$ est l'ensemble des suites $(x_1, x_2, x_3, \dots) \in G^{\mathbb{N}_{>0}}$ de sommets de G tels que
  $$\forall i \geq 1, \ \underbrace{(x_i \text{ est voisin sortant de } x_{i-1})}_{(x_{i-1}, x_i) \in E}$$

Bob a violé la règle en premier

- $A \subseteq G^{\mathbb{N}_{>0}}$ est l'ensemble des suites $(x_1, x_2, x_3, \dots) \in G^{\mathbb{N}_{>0}}$ de sommets de G tels que
  $$\exists i \geq 1, \ (x_i \text{ n'est pas voisin sortant de } x_{i-1})$$
  et le plus petit tel i soit pair

Alice a violé la règle en premier

- B idem que A avec "impair".

Remarque : $G^{\mathbb{N}_{>0}} = A \cup B \cup D$, réunion disjointe.

Prop (3.4.3) : les ensembles A et B sont ouverts dans $G^{\mathbb{N}_{>0}}$

Dém: si $\underline{\underline{x}} \in A$, disons $\underline{\underline{x}} = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$,

considérons $i \geq 1$ tel que x_i n'est pas voisin suivant
de x_{i-1}

et i est minimal (i est pair).

Alors toute suite d'éléments de G qui commence par $(x_1, x_2, \ldots, x_i)$ a la même propriété ("la règle a été suivie jusqu'à x_i, et violée à ce point") donc est dans A.

Autrement dit $V_{i+1}(\underline{\underline{x}}) \subseteq A$ donc A est ouvert.

Idem pour B. $\square$

On en déduit que:

$A \cup D$ est fermé (complémentaire de B ouvert)

$B \cup D$ est fermé (complémentaire de A ouvert)

D est fermé (complémentaire de $A \cup B$ ouvert).

D'après le théorème (3.3.2) de détermination des jeux de G-S, les jeux $G(A)$ et $G(A \cup D)$ sont déterminés.

Les jeux de G-S sont "essentiellement le même" que le jeu combinatoire défini par (G, x_0) sauf que

dans $G(A)$ les confrontations nulles sont comptées comme gagnantes par Bob

$G(A \cup D)$ elles sont comptées par Alice.

Trois possibilités

- Alice a une s.g. à $G(A)$ donc aussi à $G(A \cup D)$
  ⇝ elle a une s.g. au jeu combinatoire
- Bob a une s.g. à $G(A \cup D)$ donc aussi à $G(A)$
  ⇝ il a une s.g. au jeu combinatoire
- Alice a une s.g. à $G(A \cup D)$ et Bob à $G(A)$
  ⇝ les deux joueurs ont une stratégie assurant au moins le nul au jeu combinatoire.

Moralité: les jeux combinatoires sont tous déterminés (au sens ou soit un joueur a une s.g. soit les deux en ont une qui assure au moins le nul).

Remarque : les stratégies dont on vient de montrer l'existence sont des stratégies "historiques" ; en fait, pour un jeu combinatoire, on peut se contenter de stratégies "positionnelles", c'est-à-dire ne dépendant que de la position actuelle (et pas l'historique des coups antérieurs).

Dans un jeu combinatoire, on définit donc trois types de positions :

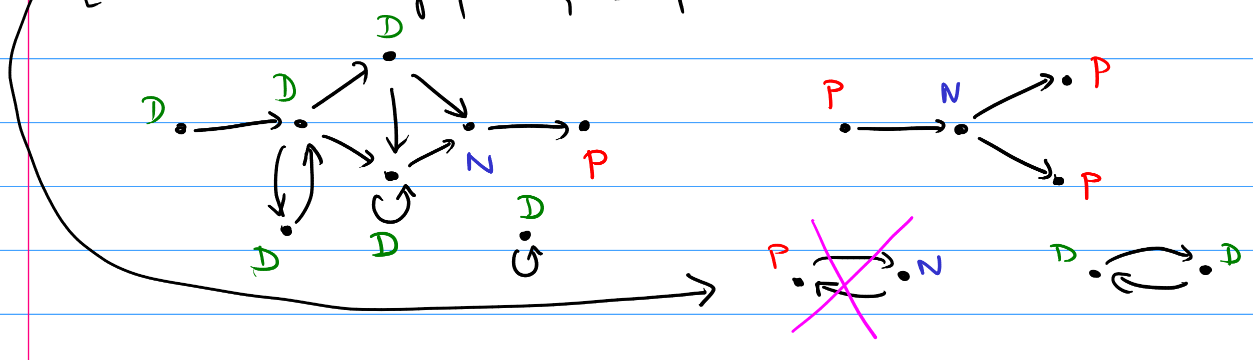
- celles à partir desquelles le joueur qui doit jouer ("Next player") a une s.g.
- celles à partir desquelles le joueur qui vient de jouer ("Previous player") a une s.g.
- celles à partir desquelles les deux joueurs ont une stratégie survivante (= assurant au moins le nul) ("Draw")

On appelle N, P et D ces trois ensembles de sommets.

Propriétés essentielles de ces ensembles (découlent de 3.1.9) :

- $x \in P$ ssi tous (∀) les voisins sortants de x sont dans N (y compris s'il n'y en a pas du tout)
- $x \in N$ ssi il existe (∃) un voisin sortant de x qui soit dans P
- $x \in D$ ssi tous ses voisins sortants sont dans $N \cup D$ et au moins l'un est dans D.

⚠ Ces conditions seules ne suffisent pas à déterminer N, P et D dans un graphe quelconque.



2023-03-13 (suite)

Chapitre 4. Théorie de l'induction bien-fondée

(généralisation de la récurrence)

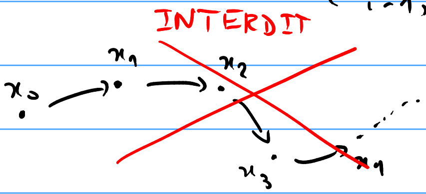
4.1. Graphes orientés bien-fondés.

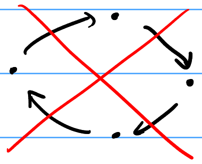
Un graphe orienté G (*fini* ou *infini*) est dit *bien-fondé*

s'il *n'existe pas* de suite infinie $(x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots)$ de sommets de G telle que

$$\forall i \geq 1 \ (\underbrace{x_i \text{ est un voisin sortant de } x_{i-1}}_{(x_{i-1},\, x_i) \text{ est une arête de } G})$$

"$x_{i-1} \to x_i$"





aussi *interdit*

Remarques (4.1.2) (a) un graphe orienté bien-fondé est acyclique

(= il n'existe pas $(x_0, \ldots, x_{n-1})$

avec $x_0 \to x_1 \to x_2 \cdots \to x_{n-1} \to x_0$)

(b) si le graphe est *fini*, la réciproque est vraie:

un graphe orienté fini acyclique est bien-fondé.

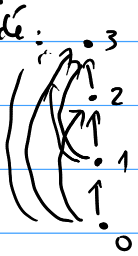
Exemple de graphe acyclique mais pas bien-fondé:

$(\mathbb{N}, <)$ c'est-à-dire $i \to j$ lorsque $i < j$

Ce graphe est acyclique

mais n'est pas bien-fondé car il existe

des suites strictement croissantes d'entiers naturels



Exemple de graphe infini bien-fondé:

$(\mathbb{N}, >)$, c'est-à-dire $i \to j$ lorsque $i > j$

Ce graphe *est* bien-fondé car

toute suite strictement décroissante d'entiers

naturels est finie (termine en temps fini).

Déf: un *puits* d'un graphe orienté est un sommet

n'ayant pas de voisin sortant.

(= aucune arête n'en part).

Prop (4.1.7) G graphe orienté. Il y a équivalence entre :

(∗) G est bien-fondé (= il n'existe pas de suite $x_0 \to x_1 \to x_2 \to \cdots$)

(†) si $N \subseteq G$ est un ensemble non-vide de sommets de G als il existe $x \in N$ qui est un "puits pour N" c'est-à-dire qu'il n'existe pas $y \in N$ tel que $x \to y$.

(‡) si $P \subseteq G$ vérifie la propriété suivante :

« si $x \in G$ est tel que tout voisin sortant de x (dans G) appartient à P alors $x \in P$ »

« P est inductif dans G »

alors $P = G$.

Dém : $\boxed{(*) \Rightarrow (\dagger)}$ Supposons par l'absurde $N \neq \emptyset$ n'ayant pas de puits pour N. Als il existe $x_0 \in N$, et comme x_0 n'est pas un puits, il existe $x_0 \to x_1$, et comme x_1 n'est pas un puits, etc. : on construit ainsi $x_0 \to x_1 \to x_2 \to \cdots$ ce qui contredit (∗).

$\boxed{(\dagger) \Rightarrow (*)}$ Supposons $x_0 \to x_1 \to x_2 \to \cdots$ chemin infini dans G. Posons $N = \{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$: il n'est pas vide, et x_i n'est pas un puits pour N car $x_i \to x_{i+1}$.

$\boxed{(\dagger) \Leftrightarrow (\ddagger)}$ Passage au complémentaire $P := G \setminus N$ de N :

(†) équivaut à : si $P \neq G$ als il existe $x \notin P$ tel que il n'existe pas $y \notin P$ tel que $x \to y$

contraposée : si $\forall x \in G\, (x \notin P \Rightarrow \exists y \notin P \text{ tq } x \to y)$ als $P = G$

contraposée si $\forall x \in G\, ((\forall y \in G\, (y \notin P \Rightarrow x \not\to y)) \Rightarrow x \in P)$ als $P = G$

$$\underbrace{\text{contraposée si } \underbrace{\forall x \in G\, ((\underbrace{\forall y \in G\, (x \to y \Rightarrow y \in P)}_{\text{"tout voisin sortant de } x \text{ appartient à } P\text{"}}) \Rightarrow x \in P)}_{\text{« P est inductif »}} \text{ als } P = G}_{(\ddagger)}$$

□

Que signifie concrètement cette propriété (‡)
(équivalente à "bien-fondé")

(‡) si $P \subseteq G$ vérifie la propriété suivante :
« si $x \in G$ est tel que tout voisin sortant de x (dans G) appartient à P
alors $x \in P$ »
alors $P = G$.

«P est inductif dans G»

supposé bien-fondé

Pour montrer une propriété P sur tous les sommets de G
il suffit de montrer que P est "inductive", où
dire que la propriété P est "inductive"
signifie qu'elle "s'hérite" des voisins sortants de x
(si les voisins sortants de x ont la à x lui-même
propriété, alors x a la propriété en question).

Bref, (tout graphe bien-fondé vérifie le)
Principe d'induction bien-fondée : pour démontrer une propriété
P sur tous les sommets de G, on peut supposer,
au moment de démontrer que P est vérifiée en x,
qu'elle est déjà connue pour les voisins sortants de x
↳ "hypothèse d'induction"

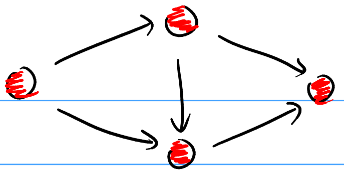
2023-03-20

Bref, le principe d'induction bien-fondée affirme
(‡) si $P \subseteq G$ vérifie la propriété suivante :
« si $x \in G$ est tel que tout voisin sortant de x (dans G) appartient à P
alors $x \in P$ »
alors $P = G$.
↖ $\forall x \in G \ (x \in P)$

Hypothèse d'induction

- Appliqué au graphe $(\mathbb{N}, >)$ ← $i \to j$ signifie $i > j$
  ce principe (‡) est une reformulation de la récurrence "forte"
- Appliqué au graphe $(\mathbb{N}, \{(i+1, i) : i \in \mathbb{N}\})$ $\overset{0}{\bullet} \leftarrow \overset{1}{\bullet} \leftarrow \overset{2}{\bullet} \leftarrow \overset{3}{\bullet} \leftarrow \cdots$
  il s'agit d'une reformulation de la récurrence usuelle.

Explication intuitive :



Définitions par induction $\overbrace{\text{bien-fondée}}^{\text{b.f.}}$:

Exactement comme la récurrence permet non seulement de démontrer des propriétés sur les entiers naturels mais aussi de construire des fonctions sur eux, de même, l'induction bien-fondée permet à la fois de démontrer des propriétés sur les sommets d'un graphe orienté b.f. ou de construire des fonctions sur eux.

Définition par induction bien-fondée: (si G est un graphe orienté b.f.) pour définir une fonction $f : G \to Z$ (Z quelconque), on peut supposer, au moment de définir $f(x)$, que $f(y)$ est déjà connu pour tout y voisin sortant de x (i.e., on peut faire appel à $f(y)$ dans la définition de $f(x)$). [Ce f est unique.]

Informatiquement / algorithmiquement : c'est une définition récursive. (Le principe assure que cette définition récursive est valable.)

Trois exemples fondamentaux:

On va supposer G bien-fondé, et dans les deux premiers exemples, temporairement, aussi, que G est fini

Ex 1: la fonction rang (G bien-fondé et fini)

$\mathrm{rk} : G \to \mathbb{N}$ est définie par

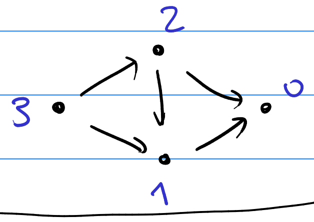
$$\mathrm{rk}(x) := \max\{\mathrm{rk}(y) : y \in \overbrace{\mathrm{outnb}(x)}^{\text{voisins sortants de } x}\} + 1$$

avec la convention $\max(\varnothing) = -1$

(alors $\mathrm{rk}(x) = 0$ si x est un puits)

On peut préférer: $\mathrm{rk}(x) = \max\{\mathrm{rk}(y) + 1 : y \in \mathrm{outnb}(x)\}$

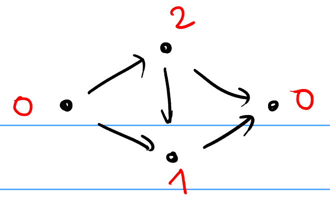
avec alors $\max(\varnothing) = 0$



Ex 2: la fonction de Grundy (G bien-fondé et fini)

$$\mathrm{gr}(x) := \operatorname{mex}\{\mathrm{gr}(y) : y \in \mathrm{outnb}(x)\}$$

où $\operatorname{mex} S := \min(\mathbb{N} \setminus S)$ = le plus petit entier naturel qui n'est pas dans S



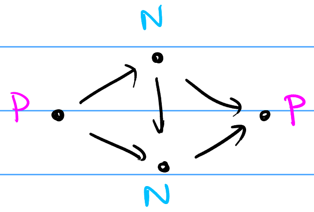
Ex3 La fonction "P"/"N"

(G bien-fondé)

On définit $f : G \longrightarrow \{\text{"P"}, \text{"N"}\}$

comme suit :

$$(\star) \quad f(x) = \begin{cases} \text{"N" s'il existe } y \in \text{outnb}(x) \text{ tel que } f(y) = \text{"P"} \\ \text{"P" sinon (c'est-à-dire : si tout } y \in \text{outnb}(x) \\ \qquad \text{vérifie } f(y) = \text{"N")} \end{cases}$$



D'après ce qu'on a vu précédemment,

la fonction $\tilde{f} : G \longrightarrow \{\text{"P"}, \text{"N"}\}$

$x \longmapsto$ "P" si le second joueur a une s.g. au jeu combinatoire $\underbrace{(G,x)}_{\hookrightarrow [G \text{ joué à partir de } x}$

$x \longmapsto$ "N" si le premier joueur a une s.g. au jeu combinatoire (G,x)

est défini partout (pas de sommet "D" car G est bien-fondé)

et vérifie les mêmes propriétés $(\star)$ que f

DONC $f = \tilde{f}$ par induction bien-fondée.

(par unicité de la définition par induction b.f. / ou par induction b.f.)

Bref, la fonction "P"/"N" qu'on vient de définir par induction b.f. nous dit quel joueur a une s.g. au jeu combinatoire (G,x).

(Remarque algorithmique : pour calculer f, on peut faire une récursion (qui termine, mais de complexité exponentielle)

ou une récursion avec mémoire

ou un tri topologique des sommets du graphe

(= en fait, un tri par la fonction rang).)

Prop: on a $\mathrm{gr}(x) = 0 \overset{(1)}{\iff} x$ est un sommet "P"
(c'est-à-dire $f(x) = \text{"P"}$)

Dém: démontrons (1) par induction bien-fondée.
Autrement dit, on peut supposer que (1) est déjà connu pour tous les voisins sortants $y \in \mathrm{outnb}(x)$.
On a alors

définition de f

$$f(x) = \text{"P"} \iff \forall y \in \mathrm{outnb}(x)\ (f(y) = \text{"N"})$$

hypothèse d'induction →

$$\overset{HI}{\iff} \forall y \in \mathrm{outnb}(x)\ (\mathrm{gr}(y) > 0)$$

Or $\mathrm{gr}(x) = \mathrm{mex}\ \{\mathrm{gr}(y) : y \in \mathrm{outnb}(x)\}$ ← définition de gr

On veut donc montrer (si $S = \{\mathrm{gr}(y) : y \in \mathrm{outnb}(x)\}$)

$$\mathrm{mex}\ S = 0 \iff \forall v \in S\ (v > 0)$$

Ce qui est clair par définition du mex. $\square$

Moralité: dans n'importe quel jeu combinatoire bien-fondé, le second joueur a une s.g. depuis le sommet x ssi la valeur de Grundy de x est 0
(sinon, c'est le premier joueur qui a une s.g.)
De plus, la stratégie en question est simplement "jouer vers un sommet dont la valeur de Grundy vaut 0" (i.e. vers un sommet "P").

2023-03-20 (suite)

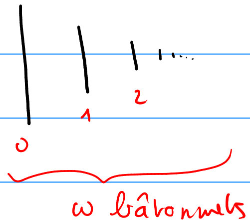
Chapitre 5. Introduction aux ordinaux.

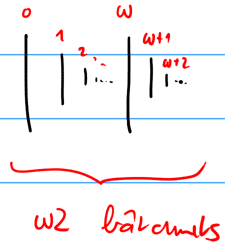
Il s'agit d'une généralisation des entiers naturels "au-delà du fini" ("transfini"), possiblement infinis mais néanmoins bien-fondés : toute suite strictement décroissante d'ordinaux est finie.

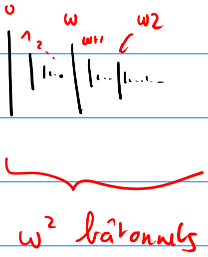
Ils servent donc à quantifier n'importe quel type de processus terminant toujours en temps fini.

Les premiers ordinaux sont :

$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 \ldots, \omega, \omega+1, \omega+2, \omega+3, \ldots,$
$\omega\cdot 2, \omega 2+1, \omega 2+2, \omega 2+3, \ldots, \omega 3, \omega 3+1, \omega 3+2, \ldots, \omega 4, \ldots$
$\omega^2, \omega^2+1, \omega^2+2, \ldots, \omega^2+\omega, \omega^2+\omega+1, \omega^2+\omega+2, \ldots, \omega^2+\omega 2, \ldots,$
$\omega^2+\omega 3, \ldots \omega^2+\omega 4, \ldots, \omega^2 2, \ldots, \omega^2 3, \ldots, \omega^2 4, \ldots$
$\omega^3, \omega^3+1 \ldots, \omega^3+\omega, \ldots, \omega^3+\omega^2, \ldots, \omega^3 2, \ldots \omega^3 3, \ldots$
$\omega^4, \ldots, \omega^5, \ldots, \omega^6, \ldots, \omega^\omega, \ldots, \omega^\omega 2, \ldots, \omega^{\omega+1}, \ldots, \omega^{\omega+2}, \ldots$
$\omega^{\omega 2}, \ldots, \omega^{\omega^2}, \ldots, \omega^{\omega^\omega}, \ldots \omega^{\omega^{\omega^\omega}} \ldots$
$\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_0 2, \ldots, \varepsilon_0\omega = \omega^{\varepsilon_0+1}, \ldots, \varepsilon_0^2, \ldots, \varepsilon_0^\omega = \omega^{\omega^{\varepsilon_0+1}}, \ldots$
$\varepsilon_0^{\varepsilon_0} = \omega^{\omega^{\varepsilon_0^2}}, \ldots, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_\omega, \ldots \varepsilon_{\varepsilon_0}, \ldots, \varepsilon_{\varepsilon_{\varepsilon_0}} \ldots$
$\varphi(2,0), \ldots, \omega_1^{CK}$ ("ordinal de Church-Kleene"), ...
— ω_1 ("premier ordinal indénombrable") ...







"Slogans" :

- toute suite strictement décroissante d'ordinaux termine en temps fini ("les ordinaux sont bien-fondés")
- Principe d'induction transfinie (= principe d'induction bien-fondée appliqué aux ordinaux)

Pour démontrer une propriété sur tous les ordinaux, o.p.s. au moment de la prouver en α, qu'elle est connue pour les $\beta < \alpha$.

(Permet aussi les définitions par induction transfinie).

- * À chaque fois qu'on a construit tous les ordinaux jusqu'à un certain point, on ajoute un (plus petit) ordinal plus grand qu'eux.
- * "Comprendre" un ordinal, c'est comprendre l'ensemble des ordinaux plus petits que lui, et la manière dont ils s'ordonnent.

Optionnel: (construction de von Neumann)

tout ordinal est l'ensemble des ordinaux plus petits que lui

$0 = \emptyset$, $1 = \{0\} = \{\emptyset\}$, $2 = \{0,1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

$3 = \{0,1,2\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$, ...

$\omega = \{0,1,2,3,\dots\} = \mathbb{N}$

$\omega+1 = \mathbb{N} \cup \{\omega\} = \mathbb{N} \cup \{\mathbb{N}\}$ ...

5.2. Ensemble bien-ordonnés et induction transfinie

si $x \leq y$ et $y \leq x$ alors $x = y$

Déf: un ensemble bien-ordonné ("b.o.") est un ensemble W totalement ordonné (relation $\leq$ réflexive, antisymétrique, transitive, et $\underbrace{\forall x,y\,(x \leq y \text{ ou } y \leq x)}_{\text{ordre "total"}}$) dont l'ordre est bien-fondé au sens où il n'existe pas de suite infinie strictement décroissante (= le graphe $(W, >)$ est bien-fondé)

toute partie non vide de W a un plus petit élément ⟺

Ex: • $\mathbb{N}$ avec son ordre usuel est b.o.

• $\mathbb{N} \cup \{\omega\}$ muni de l'ordre $\omega > k$ si $k \in \mathbb{N}$

• tout ensemble fini totalement ordonné est bien ordonné.

Contre-ex: • $\mathbb{Z}$ n'est pas b.o. $(0 > -1 > -2 > -3 > \dots)$

• $\mathbb{Q}$, ni même $\mathbb{Q}_{\geq 0}$ $(1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \dots)$

$\mathbb{R}$, ni même $\mathbb{R}_{\geq 0}$

On appelle "induction transfinie" l'induction bien-fondée sur un ensemble bien-ordonné: i.e.

• Si W est b.o. pour démontrer une propriété (ou construire une fonction) sur tous les éléments de W, on peut supposer, au moment de vérifier la propriété (ou définir la fonction) en x, qu'elle l'est déjà pour les éléments $< x$.

Déf: $\text{precs}(x) := \{y \in W : y < x\}$
"prédécesseurs stricts" de x (≈ voisins avant)

Rque: une partie d'un ensemble b.o. est elle-même b.o. (par l'ordre induit)

5.3. Comparaisons d'ensembles b.o., ordinaux

Déf: si X, Y sont deux ensembles b.o.,
une fonction $f : X \longrightarrow Y$ est dite croissante
(resp. strictement croissante)
"s-croissante"

lorsque $\forall x, x' \in X \ (x \leq x' \Rightarrow f(x) \leq f(x'))$
(resp. $\forall x, x' \in X \ (x < x' \Rightarrow f(x) < f(x'))$)

(s-croissante $\Leftrightarrow$ injective et croissante)

Prop (5.3.2): si W est b.o. et $f : W \longrightarrow W$ s-croissante
alors $\forall x \in W \ (x \leq f(x))$

Dém: On veut démontrer $x \leq f(x)$ par induction transfinie
O.p.s. ("hypothèse d'induction") $y \leq f(y)$ pour tout $y < x$
Supposons par l'absurde $f(x) < x$
Appliquons l'H.I. à $y := f(x)$: on a $f(x) \leq f(f(x))$
Or la stricte croissance de f appliquée à $f(x) < x$
donne : $f(f(x)) < f(x)$
Contradiction. □

Corollaire (5.3.3): si W est b.o. et $f : W \longrightarrow W$
bijection croissante, alors f est l'identité.

Dém: la proposition montre que f (injective croissante)
vérifie $f(x) \geq x$.
La même proposition appliquée à f^{-1} (bijection réciproque)
montre $f^{-1}(x) \geq x$ donc $x \geq f(x)$ (par croissance de f)
Donc $f(x) = x$ □

Déf: on appelle "isomorphisme" d'ensembles b.o.
une bijection croissante $W \longrightarrow W'$ (où W, W' sont b.o.)

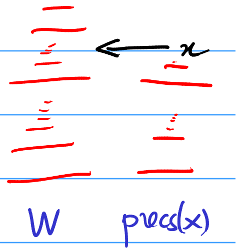
Corollaire (5.3.4): si W, W' sont b.o., il existe au plus un
isomorphisme $W \longrightarrow W'$ (i.e., s'il existe, il est unique).

Dém: si $W \overset{f_1}{\underset{f_2}{\rightrightarrows}} W'$, alors $f_2 \circ f_1^{-1} = \text{id}$ par le corollaire donc $f_2 = f_1$ □

Rqe: la réciproque d'un isomorphisme est encore un isomorphisme.

Notation: si W et W' sont b.o.,
on écrit $\#W = \#W'$ pour dire
"il existe un isomorphisme (forcément unique) entre W et W'"
(c'est bien une relation d'équivalence)
lire "W et W' sont *isomorphes*"
(ou plus tard "W et W' ont le même cardinal")

Corollaire (5.3.5) : si W est b.o. et $x \in W$
et $\mathrm{precs}(x) := \{y \in W : y < x\}$
alors $\mathrm{precs}(x)$ *n'est pas* isomorphe à W

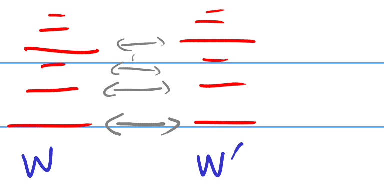


Dém: supposons par l'absurde qu'il existe
$f : W \to \mathrm{precs}(x)$ bijective croissante.
Vue comme une fonction $W \to W$, elle est injective croissante donc par 5.3.2. on a $f(x) \geq x$,
ce qui contredit $f(x) \in \mathrm{precs}(x)$. □

Théorème (5.3.6) : si W et W' sont b.o., alors
exactement une des affirmations suivantes est vraie :

- il existe un isomorphisme $f : W \to \mathrm{precs}_{W'}(y)$ où $y \in W'$
- il existe un isomorphisme $f : \mathrm{precs}_W(x) \to W'$ où $x \in W$
- il existe un isomorphisme $f : W \to W'$

De plus, l'isomorphisme est automatiquement unique,
et dans les deux premiers cas l'élément noté y (resp. x) l'est aussi.



Notation: dans le premier cas, on note $\#W < \#W'$
(autrement dit, cela signifie $\#W = \#\mathrm{precs}_{W'}(y)$
pour un $y \in W'$)
dans le second cas, on note $\#W > \#W'$
dans le troisième, on a déjà défini $\#W = \#W'$.

Prop (5.3.7): si X est b.o. et $w, w' \in X$ et si on pose $W := \mathrm{precs}_X(w)$
$W' := \mathrm{precs}_X(w')$ alors on a

$$w < w' \iff \# W < \# W'$$
$$w > w' \iff \# W > \# W'$$
$$w = w' \iff \# W = \# W'$$

Fait: « $\#W < \#W'$ » est une relation d'ordre strict sur les classes d'équivalence d'ensembles bien ordonnés (elle est irréflexive, antisymétrique et transitive, et compatible à l'équivalence « $\#W = \#W'$ »).

Déf: on appelle "ordinal de W" et on note $\#W$ la classe d'équivalence de l'ensemble (b.o.) W par la relation d'équivalence « $\#W = \#W'$ » (être isomorphe)

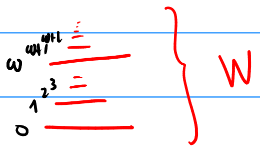
2023-03-27 Ex: on note n l'ordinal $\#\{0, \dots, n-1\}$ associé à l'ensemble des entiers naturels $< n$.

On note $\omega := \#\mathbb{N}$ l'ordinal de l'ensemble des entiers naturels.

Si W est b.o et $w \in W$, on note $\#w := \#\mathrm{precs}(w)$ l'ordinal de l'ensemble des prédécesseurs stricts de w

On a vu ci-dessus que $\begin{cases} w < w' \iff \#w < \#w' \\ w = w' \iff \#w = \#w' \\ w > w' \iff \#w > \#w' \end{cases}$

P. ex, $\#w = 0$ signifie "w est le plus petit élément de W".



$\rightsquigarrow \quad \#W = \omega \cdot 2$

Thm (5.3.10): tout ensemble d'ordinaux (avec leur ordre naturel (cf 5.3.7)) est bien-ordonné: toute suite strictement décroissante d'ordinaux est finie.

Dans tout ensemble non vide d'ordinaux, il y en a un plus petit.

Prop (5.3.11): tout ensemble d'ordinaux S a une borne supérieure:
c'est-à-dire qu'il existe un ordinal $\sup S$
qui est le plus petit majorant (large) de S
Il existe aussi une "borne supérieure stricte" notée $\sup^+ S$,
c'est-à-dire un plus petit majorant strict de S
(α est dit "majorant strict" de S lorsque $\forall \beta \in S\ (\alpha > \beta)$)
(En fait on verra que $\sup^+ S = \sup\{\beta+1 : \beta \in S\}$)

Remarque: cette proposition implique notamment qu'il n'existe pas d'ensemble de tous les ordinaux (un tel ensemble n'aurait pas de majorant strict).
("Paradoxe de Burali-Forti")

Remarque: si α est un ordinal, $\#\{\beta : \beta < \alpha\} = \alpha$.

5.4. Ordinaux successeurs et limites.

Déf. le successeur d'un ordinal α est le successeur strict $\sup^+\{\alpha\}$ de $\{\alpha\}$, c'est-à-dire le plus petit ordinal $> \alpha$
(qui existe par 5.3.11).

On le note $\alpha + 1$.

(Autrement dit, $\beta > \alpha$ signifie $\beta \geq \alpha + 1$).

Si on préfère, un ordinal successeur est l'ordinal d'un ensemble bien-ordonné qui a un plus grand élément
(si W a x comme plus grand élément, alors
$\# W = (\# x) + 1$).

On distingue trois sortes d'ordinaux:

- l'ordinal nul $0 = \# \emptyset$, (Ex. 0)
- les ordinaux successeurs, Ex: $1, 7, 42, \omega+1, \omega+2, \omega^2+7$
- les autres, qu'on appelle ordinaux limites
  (autrement dit, δ est limite lorsque pour tout $\beta_1 < \delta$ il existe β_2 tel que $\beta_1 < \beta_2 < \delta$)
  Ex: ω, $\omega \cdot 2$, ω^2, $\omega^2 + \omega$, ω^ω, ε_0, ω_1

souvent notés "δ"

Si δ est un ordinal limite, et f une fonction croissante définie sur l'ensemble $\{\xi : \xi < \delta\}$, on appelle limite de f en δ et on note $\lim_{\delta} f$ ou $\lim_{\xi \to \delta} f(\xi)$

la valeur $\sup\{f(\xi) : \xi < \delta\}$

(i.e. le plus petit ordinal $\geq f(\xi)$ pour tout $\xi < \delta$).

Ex :
- $\delta = \lim_{\xi \to \delta} \xi$ ("δ est le plus petit ordinal plus grand que tous les $\xi < \delta$")
- $\lim_{n \to \omega} 2^n = \sup\{1, 2, 4, 8, \ldots\} = \omega$

5.5. Somme, produit, et exponentielle d'ordinaux

Deux définitions à chaque fois :
- une définition par les ensembles b.o.,
- une définition par induction transfinie.

La somme : on cherche à définir $\alpha + \beta$ si α, β deux ordinaux.

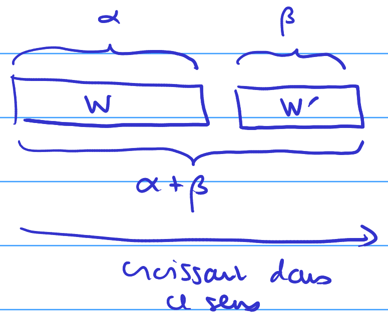
* Avec les ensembles b.o.

si $\alpha = \# W$ et $\beta = \# W'$, on appelle W'' l'ensemble union disjointe

$$W \uplus W'$$

(c'est-à-dire

$$(W \times \{0\}) \cup (W' \times \{1\})$$
$$= \{(w, 0) : w \in W\} \cup \{(w', 1) : w' \in W'\})$$



$$0 < 1 < 2 < \hat{0} < \hat{1}$$
$$0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4$$

ordonné en rendant les éléments de W' plus grands que ceux de W (i.e. W' après W).

On pose alors $\alpha + \beta := \# W''$

* Par induction transfinie sur β (on p.s. connu $\alpha + \gamma$ pour $\gamma < \beta$)

On distingue trois cas :
- β est nul : $\alpha + 0 = \alpha$
- β est successeur, i.e. $\beta = \gamma + 1$ (successeur de γ) :

  on pose $\alpha + \beta = \alpha + (\gamma + 1)$
  $:= (\alpha + \gamma) + 1$
  (successeur de $\alpha + \gamma$)

- $\beta = \delta$ est limite : on pose

$$\alpha + \delta = \lim_{\xi \to \delta} (\alpha + \xi) \qquad (\text{"continuité"})$$

Quelques propriétés de l'addition des ordinaux:

- associativité: $(\alpha+\beta)+\gamma = \alpha + (\beta+\gamma)$ noté $\alpha+\beta+\gamma$
- 0 est neutre: $\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$
- le successeur de α est $\alpha + 1$
- l'addition n'est pas commutative en général:

$$\underset{|}{1} + \underset{|||\cdots}{\omega} = \underset{||\cdots}{\omega}$$

par induction transfinie: $1+\omega = \lim_{\xi \to \omega} (1+\xi)$

$$= \sup\{1,2,3,4,\dots\} = \omega$$

mais $\underset{|||\cdots}{\omega} + \underset{|}{1} > \omega$

est le successeur de ω donc $> \omega$.

- l'addition est croissante en chaque variable et strictement croissante en la seconde

  (si $\alpha \leq \alpha'$ alors $\alpha+\beta \leq \alpha'+\beta$
  si $\beta < \beta'$ alors $\alpha+\beta < \alpha+\beta'$)

- lorsque $\alpha \leq \alpha'$, il existe un <u>unique</u> β tel que $\alpha' = \alpha+\beta$

  (parfois noté "$-\alpha+\alpha'$")

- notamment: si $\alpha+\beta = \alpha+\beta'$ alors $\beta = \beta'$
  (simplification à <u>gauche</u>).

Le produit:

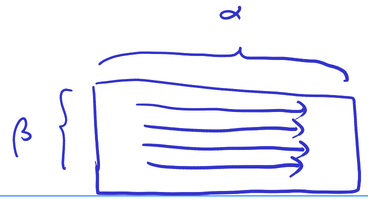
* Par ensembles b.o.: si $\alpha = \#W$ et $\beta = \#W'$

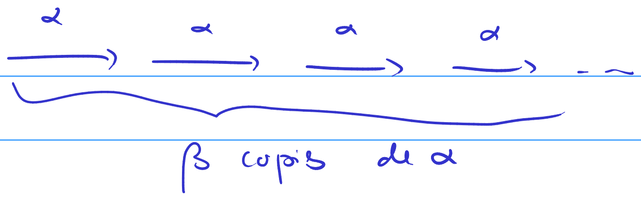
on pose $W'' := W \times W'$

ordonné lexicographiquement en donnant le poids fort à W'

c'est-à-dire $(x_1, y_1) < (x_2, y_2)$

ssi $y_1 < y_2$ ou bien $(y_1 = y_2$ et $x_1 < x_2)$





* Par induction transfinie:

- $(\alpha\cdot 0) = 0$
- $\alpha\cdot(\gamma+1) = (\alpha\cdot\gamma)+\alpha$
- si δ limite: $\alpha\cdot\delta = \lim_{\xi\to\delta}(\alpha\cdot\xi)$

Quelques propriétés:

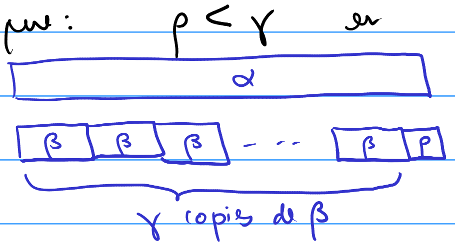
- associativité: $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$ noté $\alpha\beta\gamma$
- 0 est absorbant: $0\alpha = \alpha 0 = 0$
- 1 est neutre: $1\alpha = \alpha 1 = \alpha$
- distributive à droite sur l'addition: $\alpha(\beta+\gamma) = \alpha\beta+\alpha\gamma$
  (notamment: $\alpha\cdot 2 = \alpha+\alpha$)
- pas commutatif en général:

  $2\omega = \omega$ $\quad ||\ \ ||\ \ ||\ \ ||\ \ldots$

  par induction transfinie: $\sup\{0,2,4,6,8\ldots\} = \omega$

  $\omega 2 = \omega+\omega > \omega$ $\quad |\,|\ldots\ \ |\,|\ldots$

- croissante en chaque variable,
  et même strictement croissante en la seconde
  si la première est >0 → (à gauche)
- Division euclidienne: par α ("dividende")
  et $\beta>0$ ("diviseur"), il existe
  γ ("quotient") et ρ ("reste") uniques
  tels que: $\rho<\gamma$ et $\alpha = \beta\gamma+\rho$



- conséquence: si $\beta\gamma = \beta\gamma'$ avec $\beta>0$
  alors $\gamma = \gamma'$
  (simplification à gauche dans les produits)

Ex: la division euclidienne $\omega\cdot 2+3$ par ω: justement $\omega\cdot\overset{\text{quotient}}{2}+\overset{\text{reste}}{3}$

Un ordinal est dit <u>pair</u> lorsqu'il s'écrit 2γ (reste 0)

<u>impair</u> lorsqu'il s'écrit $2\gamma+1$ (reste 1)

(dans la division euclidienne par 2)

<u>Ex:</u> division euclidienne de ω par 2 : c'est $\omega = \underbrace{2\cdot\omega}_{\text{quotient}} + \underbrace{0}_{\text{reste}}$

(donc ω est pair)

L'exponentielle

* Définition inductive: $\alpha^0 = 1$

$\alpha^{\gamma+1} = \alpha^\gamma \cdot \alpha$ si $\beta = \gamma+1$ (successeur)

$\alpha^\delta = \lim_{\xi\to\delta} \alpha^\xi$ si δ limite

(en excluant 0^0)

* Par les ensembles b.o. : si $\alpha = \# W$ et $\beta = \# W'$,

on appelle $W'' := W^{(W')} = \{$fonctions $W' \to W$ qui ne prennent qu'un nombre fini de valeurs $\neq 0_W\}$

plus petit élément de W

Ordonné par l'ordre lexicographique donnant le plus de poids aux valeurs sur les grands éléments de W', c'est-à-dire

$f < f'$ ssi $f(x) < f'(x)$ où x est le plus grand élément tel que $f(x) \neq f'(x)$

(si $f \neq f'$)

<u>Ex:</u> $\omega^2 = \omega^1 \cdot \omega^1 = \omega\cdot\omega$

$= \#\{(x_0, x_1) \in \mathbb{N}^2$ ordonnés par l'ordre lexicog$^{\text{que}}$ donnant le plus de poids à $x_1\}$

$2^\omega = \lim_{\xi\to\omega} 2^\xi = \sup\{1, 2, 4, 8, \ldots\} = \omega$

$= \#\{$suites binaires n'ayant qu'un nombre fini de 1 ordonnés par l'ordre lexicographique ……$\}$

$= \#\{$écritures binaires des entiers naturels (écrits à l'envers)$\} = \#\mathbb{N} = \omega$

Quelques propriétés: $1^\beta = 1$ pour tout β

$0^\beta = 0$ pour tout $\beta > 0$

$\alpha^{(\beta+\gamma)} = \alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma$ et $\alpha^{(\beta\gamma)} = (\alpha^\beta)^\gamma$ pour tous α, β, γ

· l'exponentiation est croissante en chaque variable
écarté le cas idiot de 0^0
et même strictement croissante en l'exposant
lorsque la base est ≥ 2.

⚠ $(\alpha\beta)^\gamma$ n'est pas $\alpha^\gamma \beta^\gamma$ en général

Ex: $4^\omega = \omega$ mais $2^\omega \cdot 2^\omega = \omega \cdot \omega = \omega^2 > \omega$.

* Écriture en base τ des ordinaux.

Soit $\tau \geq 2$ ("base"). Tout ordinal α s'écrit de façon unique

$$\alpha = \tau^{\gamma_s} \xi_s + \cdots + \tau^{\gamma_1} \xi_1$$

où $\gamma_s > \gamma_{s-1} > \cdots > \gamma_2 > \gamma_1 \geq 0$ sont des ordinaux et

$\underbrace{\xi_1, \ldots, \xi_s}_{\text{"chiffres" de l'écriture en base } \tau \text{ de } \alpha}$ des ordinaux $< \tau$ et non nuls

Si on préfère: $\alpha = \cdots + \tau^\iota \xi_{(\iota)} + \cdots + \tau^2 \xi_{(2)} + \tau^1 \xi_{(1)} + \xi_{(0)}$
où ι parcourt tous les ordinaux, et
$\xi_{(\iota)} < \tau$, tous nuls sauf un nombre fini.

(Rapport entre les deux: $\xi_j = \xi_{(\gamma_j)}$)

Deux cas essentiels: $\tau = 2$ ⇝ "écriture binaire"
("tout ordinal s'écrit de façon unique $2^{\gamma_s} + \cdots + 2^{\gamma_1}$ où $\gamma_s > \cdots > \gamma_1$)

$\tau = \omega$ ⇝ "forme normale de Cantor" (FNC)
(les chiffres sont des entiers naturels)

La comparaison de deux écritures en base τ se fait lexicographiquement:
sur la forme $\alpha = \tau^{\gamma_s} \xi_s + \cdots + \tau^{\gamma_1} \xi_1$,
on compare γ_s puis ξ_s puis γ_{s-1} puis…,
sur la forme $\alpha = \cdots + \tau^\iota \xi_{(\iota)} + \cdots + \tau^2 \xi_{(2)} + \tau^1 \xi_{(1)} + \xi_{(0)}$
on compare le plus grand $\xi_{(\iota)}$ qui diffère

Exemple de FNC:

$$\omega^{\omega\cdot 3} \cdot 7 + \omega^{\omega+5} \cdot 42 + \omega^3 \cdot 1 + \omega^0 \cdot 666$$

chiffres non nuls 7, 42, 1, 666 exposants : $\omega \cdot 3 > \omega + 5 > 3 > 0$

Forme normale de Cantor itérée (FNCI):

c'est la FNC dans laquelle les exposants eux-mêmes sont écrits en FNCI et inférieurs à l'ordinal représenté.

Cette écriture est possible pour tous les ordinaux $\alpha < \varepsilon_0$

où $\varepsilon_0 := \sup\{\omega, \omega^\omega, \omega^{\omega^\omega}, \omega^{\omega^{\omega^\omega}} \dots\}$

est le plus petit ordinal vérifiant $\gamma = \omega^\gamma$.

(La FNC de ε_0 est : ω^{ε_0})

Exemples de FNCI:

$$\omega^{\omega^{\omega\cdot 3}\cdot 7 + \omega^{\omega+5}\cdot 42}\cdot 1729 + \omega^{\omega^{\omega 2}\cdot 1000 + \omega + 33}\cdot 299\,792\,458$$

légitime car

$$\omega^{\omega\cdot 3}\cdot 7 + \omega^{\omega+5}\cdot 42 > \omega^{\omega 2}\cdot 1000 + \omega + 33$$

(car $\omega 3 > \omega 2$)

$$> \omega^{\omega^{\omega\cdot 3}\cdot 7 + \omega^{\omega+4}\cdot 333}\cdot 2023 + \omega^{\omega^{\omega 3}\cdot 5 + \omega + 33}\cdot 299\,792\,458$$

légitime car

$$\omega^{\omega\cdot 3}\cdot 7 + \omega^{\omega+4}\cdot 333 > \omega^{\omega 3}\cdot 5 + \omega + 33$$

Passage de la FNC à l'écriture binaire et vice versa:

on écrit $\omega^\gamma \cdot \underbrace{m}_{\substack{\text{chiffre de la}\\ \text{FNC}\\ m\in\mathbb{N}}}$ en $\omega^\gamma \cdot \underbrace{(2^{c_r} + \dots + 2^{c_0})}_{\substack{\text{écriture}\\ \text{binaire de } m}} = (2^\omega)^\gamma \cdot (2^{c_r} + \dots + 2^{c_0})$

$$= 2^{(\omega\gamma)} \cdot (2^{c_r} + \dots + 2^{c_0})$$

$$= \underbrace{2^{\omega\gamma + c_r} + \dots + 2^{\omega\gamma + c_0}}_{\text{écriture binaire}}$$

et on applique ça à chaque terme de la FNC.

Ex:

$$\omega^{\omega^2 3}\cdot 5 + \omega^{\omega+1}\cdot 8 + \omega^{17}\cdot 6 + 12$$

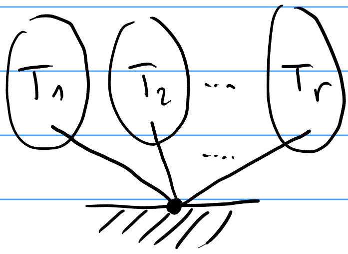
$$= (2^\omega)^{\omega^2 3}\cdot(2^2+2^0) + (2^\omega)^{\omega+1}\cdot(2^3) + (2^\omega)^{17}\cdot(2^2+2^1) + (2^3+2^2)$$

$$= 2^{\omega^3\cdot 3+2} + 2^{\omega^3 3} + 2^{\omega^2+\omega+3} + 2^{\omega 17+2} + 2^{\omega 17+1} + 2^3 + 2^2$$

5.6 Retour sur le jeu de l'hydre

Si T est une hydre (= un arbre fini enraciné) on va lui associer un ordinal $o(T) < \varepsilon_0$ par récurrence sur la hauteur de l'arbre :

si $T =$



par HR ops connus $o(T_1), \ldots, o(T_r)$

quitte à réordonner ops $o(T_1) \geq o(T_2) \geq \cdots \geq o(T_r)$

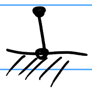
on pose alors

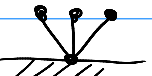
$$o(T) := \omega^{o(T_1)} + \cdots + \omega^{o(T_r)}$$

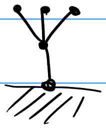
Quitte à regrouper les ω^γ identiques, ceci donne une FNC.

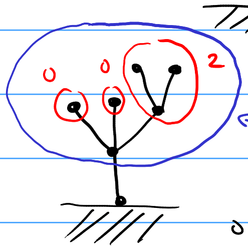
Ex:


$o(T) = 0$


$o(T) = \omega^{o(\bullet)} = \omega^0 = 1$

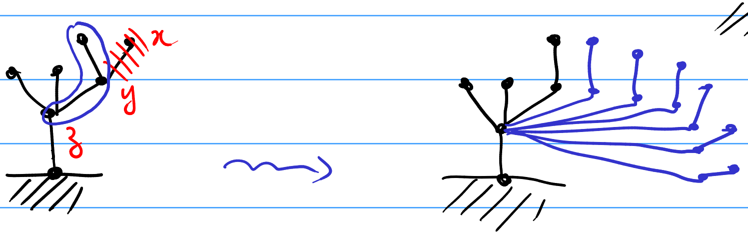

$o(T) = \omega^0 + \omega^0 + \omega^0 = 3$


$o(T) = \omega^{o(\bullet)} = \omega^3$



$\omega^2 + \omega^0 + \omega^0 = \omega^2 + 2$

$o(T) = \omega^{\omega^2+2}$



Si T' est obtenu en coupant une tête quelconque de l'hydre, alors $o(T') < o(T)$ par comparaison des FNC.

Si T_z est le sous-arbre issu de z (grand-père de la tête x [coupée]) avant les coups de Hercule + hydre,

$$o(T_z) = \omega^{o(T_1)} + \cdots + \omega^{o(T_r)} \quad \text{où} \quad o(T_1) \geq \cdots \geq o(T_r)$$

Hercule remplace un T_i par T_i' avec $o(T_i') < o(T_i)$

↳ celui qui a y pour racine

l'hydre en produit N copies

donc $\omega^{o(T_i)} \rightsquigarrow \omega^{o(T_i')} \cdot N$ avec $o(T_i') < o(T_i)$

dans la FNC de $o(T_z)$

Par comparaison des FNC, $\underbrace{o(T_z')}_{\text{après les coups de Hercule + hydre}} < o(T_z)$

Donc $o(T') < o(T)$ après les coups de Hercule + hydre.

Donc le jeu termine en temps fini.

2023-04-03

Chapitre 6. Jeux combinatoires bien-fondés impartiaux.

("Théorie de Sprague-Grundy")

Jeux de la forme (G, x_0)

G graphe orienté bien-fondé, x_0 sommet de G "position initiale"

Alice choisit $x_0 \to x_1$

Bob choisit $x_1 \to x_2$

Alice choisit $x_2 \to x_3$

⋮

Le jeu termine car G est bien-fondé

Le joueur qui ne peut pas jouer a perdu (variante "normale")

Déf: la fonction de Grundy gr, fonction sur G à valeurs ordinals définie par induction bien-fondée:

$$\mathrm{gr}(x) := \underbrace{\mathrm{mex}}\,\{\mathrm{gr}(y) : y \in \underbrace{\mathrm{outnb}(x)}_{\text{voisins sortants de } x}\}$$

mex S = le plus petit ordinal qui n'est pas dans S (existe toujours)

définition par induction bien-fondée

Déf: fonction rang

$$\mathrm{rk}(x) := \underbrace{\sup{}^+}\,\{\mathrm{rk}(y) : y \in \mathrm{outnb}(x)\}$$

$\sup^+ S$ = le plus petit ordinal qui est > à tout élément de S (existe toujours)

Fonction "P"/"N"

$$f(x) = \text{"N"} :\iff \exists y \in \mathrm{outnb}(x)\ (f(y) = \text{"P"})$$

$$f(x) = \text{"P"} :\iff \forall y \in \mathrm{outnb}(x)\ (f(y) = \text{"N"})$$

On a vu:

$f(x_0) = \text{"N"} \iff$ le premier joueur ("Next player") a une s.g.

$f(x_0) = \text{"P"} \iff$ le second joueur ("Previous player") a une s.g.

La stratégie gagnante consiste à jouer vers les sommets P.

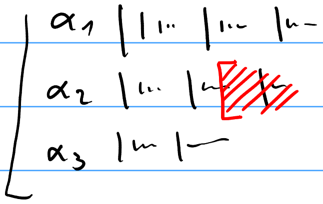
* On a

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = \text{"P"} \iff \mathrm{gr}(x) = 0 \\ f(x) = \text{"N"} \iff \mathrm{gr}(x) > 0 \end{array}\right] \text{ par induction bien-fondée}$$

Donc la s.g consiste à jouer pour annuler la valeur de Grundy.

Nim transfini: une position est un r-uplet $(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ d'ordinaux. Un coup consiste à *diminuer strictement* *un et un seul* des α_i.

On va analyser ce jeu en deux temps:



- le jeu consistant en une seule ligne de nim ou "*nimbre*"
- l'opération combinant les lignes ensemble, appelée "*somme de nim*" (ou "somme disjonctive")

Nimbres: si α est un ordinal, le jeu $*\alpha$ ou "nimbre associé à α" est le jeu dont:

- les positions sont les ordinaux $\gamma \leq \alpha$
- on a une arête $\gamma \to \gamma'$ lorsque $\gamma' < \gamma$
- la position initiale est α.

N.B: les voisins sortants de $*\alpha$ peuvent être identifiés aux $*\beta$ pour $\beta < \alpha$

Somme de nim (6.2.1) Si (G_1, x_1) et (G_2, x_2) sont deux jeux combinatoires impartiaux, leur *somme de nim* $(G_1 \oplus G_2, x_1 \oplus x_2)$ est définie par:

- les sommets de $G_1 \oplus G_2$ sont les couples $\overbrace{(z_1, z_2)}^{z_1 \oplus z_2}$ avec z_1 sommet de G_1 et z_2 de G_2 (produit cartésien)
- on a une arête $(y_1, y_2) \longrightarrow (z_1, z_2)$ ssi:
  - soit $y_2 = z_2$ et $y_1 \to z_1$ dans G_1
  - soit $y_1 = z_1$ et $y_2 \to z_2$ dans G_2
- la position initiale est (x_1, x_2) notée $x_1 \oplus x_2$

N.B. (6.2.3): le graphe $G_1 \oplus G_2$ est *bien-fondé* si G_1 et G_2 le sont

Le jeu de nim transfini est défini comme une somme de nim de nimbres $((*\alpha_1) \oplus \dots \oplus (*\alpha_r))$.

Valeurs de Grundy:

* D'un nimbre:

Prop (6.1.5): $\mathrm{gr}(*\alpha) = \alpha$ (Dém: par induction transfinie)

* But: calculer $\mathrm{gr}(G_1 \oplus G_2)$ en fonction de $\mathrm{gr}(G_1)$ et $\mathrm{gr}(G_2)$.

Somme de nim entre ordinaux:

$$\alpha_1 \oplus \alpha_2 := \text{mex}\left(\{\beta_1 \oplus \alpha_2 : \beta_1 < \alpha_1\} \cup \{\alpha_1 \oplus \beta_2 : \beta_2 < \alpha_2\}\right)$$

(définition par induction bien-fondée : il s'agit du plus petit ordinal qui n'est pas de la forme $\beta_1 \oplus \alpha_2$ pour $\beta_1 < \alpha_1$ ni $\alpha_1 \oplus \beta_2$ pour $\beta_2 < \alpha_2$)

$\oplus$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0	3	2
2	2	3	0	1
3	3	2	1	0

Buts:

- vérifier que
$$gr(G_1 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{somme de nim} \\ \text{de jeux}}}{\oplus} G_2) = gr(G_1) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{somme de nim} \\ \text{d'ordinaux}}}{\oplus} gr(G_2)$$
- calculer $\alpha_1 \oplus \alpha_2$ à partir des écritures binaires de α_1 et α_2

Vérifications faciles:

Prop (6.2.7): l'opération $\oplus$ sur les ordinaux est commutative.

Prop (6.2.8): 0 est neutre pour $\oplus$ (i.e. $\alpha \oplus 0 = 0 \oplus \alpha = \alpha$)

Prop (6.2.9): si $\alpha_1 \oplus \alpha_2 = \alpha_1 \oplus \alpha_2'$ alors $\alpha_2 = \alpha_2'$

Dém: on suppose $\alpha_1 \oplus \alpha_2 = \alpha_1 \oplus \alpha_2'$ et par l'absurde $\alpha_2 \neq \alpha_2'$

Sans perte de généralité, o.p.s. $\alpha_2' < \alpha_2$

On a
$$\alpha_1 \oplus \alpha_2 := \text{mex}\Big(\underbrace{\{\beta_1 \oplus \alpha_2 : \beta_1 < \alpha_1\} \cup \underbrace{\{\alpha_1 \oplus \beta_2 : \underbrace{\beta_2 < \alpha_2}_{\alpha_2' \text{ est dedans}}\}}_{\text{donc } \alpha_1 \oplus \alpha_2' \text{ est dedans}}}_{\text{donc } \alpha_1 \oplus \alpha_2' \text{ est dedans}}\Big)$$

donc $\alpha_1 \oplus \alpha_2 \neq \alpha_1 \oplus \alpha_2'$. □

Thm (6.2.10): si G_1 et G_2 sont deux jeux combinatoires impartiaux bien-fondés, et si $gr(G_1) = \alpha_1$ et $gr(G_2) = \alpha_2$

alors $gr(G_1 \oplus G_2) = \alpha_1 \oplus \alpha_2$

(Bref, $gr(G_1 \oplus G_2) = gr(G_1) \oplus gr(G_2)$).

Dém: on note $y_1 \oplus y_2$ la position (y_1, y_2) du jeu $G_1 \oplus G_2$.

On montre par induction bien-fondée sur $G_1 \oplus G_2$ que:

$$gr(y_1 \oplus y_2) = gr(y_1) \oplus gr(y_2)$$

définition de gr

Or $\quad gr(y_1 \oplus y_2) := \text{mex}(\{gr(t) : t \text{ voisin sortant de } y_1 \oplus y_2\})$

$= \text{mex}(\{gr(z_1 \oplus y_2) : z_1 \in \text{outnb}(y_1)\}$

(définition de $G_1 \oplus G_2$) $\qquad \cup \{gr(y_1 \oplus z_2) : z_2 \in \text{outnb}(y_2)\})$

HI $\longrightarrow = \text{mex}(\{gr(z_1) \oplus gr(y_2) : z_1 \in \text{outnb}(y_1)\} \cup \{gr(y_1) \oplus gr(z_2) : z_2 \in \text{outnb}(y_2)\})$ $=: T$

Et $\quad gr(y_1) \oplus gr(y_2) = \text{mex}(\{\beta_1 \oplus gr(y_2) : \beta_1 < gr(y_1)\} \cup \{gr(y_1) \oplus \beta_2 : \beta_2 < gr(y_2)\})$ $=: S$

Bref, on veut montrer $\text{mex}\, S = \text{mex}\, T$.

- On a $S \subseteq T$: en effet, $S_1 \subseteq T_1$

  où $S_1 := \{\beta_1 \oplus gr(y_2) : \beta_1 < gr(y_1)\}$

  $T_1 := \{gr(z_1) \oplus gr(y_2) : z_1 \in \text{outnb}(y_1)\}$

  car $gr(y_1) = \text{mex}\{gr(z_1) : z_1 \in \text{outnb}(y_1)\}$

  ↑ définition de gr

  donc si $\beta_1 < gr(y_1)$ alors $\beta_1 = gr(z_1)$ pour un certain $z_1 \in \text{outnb}(y_1)$

  ce qui montre $S_1 \subseteq T_1$

  et de même $S_2 \subseteq T_2$ donc $S = T$.

- Or $\quad gr(y_1) \oplus gr(y_2)$ n'est pas dans T par (6.2.9)

  (car si $z_1 \in \text{outnb}(y_1)$,

  $gr(z_1) \neq gr(y_1)$ donc $gr(z_1) \oplus gr(y_2) \neq gr(y_1) \oplus gr(y_2)$

  ↑ déf de gr et du mex

  et de même

  $gr(y_1) \oplus gr(z_2) \neq gr(y_1) \oplus gr(y_2)$)

Ceci montre $\text{mex}\, S \notin T$.

Bref, on a montré $\underbrace{S \subseteq T \text{ et } \text{mex}\, S \notin T}_{\text{ceci montre}}$.

$\text{mex}\, S = \text{mex}\, T$

Ce qui conclut l'induction. □

Prop (6.2.11) : L'opération $\oplus$ est associative sur les jeux (à isomorphisme près)

donc sur les ordinaux

Dém :

$$(\alpha \oplus (\beta \oplus \gamma) \overset{6.1.5}{=} gr(*\alpha) \oplus (gr(*\beta) \oplus gr(*\gamma))$$

$$\overset{6.2.10}{=} gr(*\alpha) \oplus gr(*\beta \oplus *\gamma)$$

$$\overset{6.2.10}{=} gr(*\alpha \oplus (*\beta \oplus *\gamma))$$

$$= gr((*\alpha \oplus *\beta) \oplus *\gamma)$$

$= $ idem en sens inverse $= (\alpha \oplus \beta) \oplus \gamma$ □

Prop (6.2.12) Pour tout α, on a $\alpha \oplus \alpha = 0$.

Sur les jeux il suffit de montrer que le second joueur a une s.g. à $G \oplus G$ quel que soit G : ceci se fait en jouant la stratégie "miroir" (reproduire sur un des termes de la somme ce que fait l'adversaire sur l'autre).

Récapitulation : $\oplus$ sur les ordinaux est associative, commutative, a 0 pour élément neutre ($\alpha \oplus 0 = \alpha$, $0 \oplus \alpha = \alpha$) vérifie $\alpha \oplus \alpha = 0$ quel que soit α et on a vu $gr(G_1 \oplus G_2) = gr(G_1) \oplus gr(G_2)$

Bonus à l'associativité :

Prop (6.2.13)

$$\alpha_1 \oplus \dots \oplus \alpha_r = \max \{ \alpha_1 \oplus \dots \oplus \beta \oplus \dots \oplus \alpha_r \ : \ \beta < \alpha_i \}$$

(le terme α_i a été remplacé par un ordinal $\beta < \alpha_i$)

Notamment applicable au jeu de nim avec r rangées.

$$gr(\underbrace{*\alpha_1 \oplus \dots \oplus *\alpha_r}_{\text{(jeu de nim avec } \alpha_1, \dots, \alpha_r \text{ bâtonnets sur } r \text{ rangées)}}) = \alpha_1 \oplus \dots \oplus \alpha_r$$

Prop (6.2.14): Si $\gamma_1 > \dots > \gamma_r$ sont des ordinaux, alors

$$\underbrace{2^{\gamma_1} + \dots + 2^{\gamma_r}}_{\text{écriture binaire de cet ordinal}} = 2^{\gamma_1} \oplus \dots \oplus 2^{\gamma_r}$$

Corollaire: $(2^{\gamma_1} + \dots + 2^{\gamma_r}) \oplus (2^{\gamma_1'} + \dots + 2^{\gamma_s'}) = 2^{\gamma_1''} + \dots + 2^{\gamma_t''}$

où les $\gamma_1'' > \dots > \gamma_t''$ sont les ordinaux qui apparaissent dans un et un seul des deux ensembles

$\gamma_1 > \dots > \gamma_r$ et $\gamma_1' > \dots > \gamma_s'$ ("ou exclusif")

Dém du corollaire (en utilisant la proposition):

$$\begin{aligned}
&(2^{\gamma_1} + \dots + 2^{\gamma_r}) \oplus (2^{\gamma_1'} + \dots + 2^{\gamma_s'}) \\
\overset{6.2.14}{=}\ &(2^{\gamma_1} \oplus \dots \oplus 2^{\gamma_r}) \oplus (2^{\gamma_1'} \oplus \dots \oplus 2^{\gamma_s'}) \\
\overset{\text{associativité}}{=}\ &2^{\gamma_1} \oplus \dots \oplus 2^{\gamma_r} \oplus 2^{\gamma_1'} \oplus \dots \oplus 2^{\gamma_s'} \\
=\ &2^{\gamma_1''} \oplus \dots \oplus 2^{\gamma_t''} \quad \leftarrow \text{par commutativité \& le fait que } 2^{\gamma} \oplus 2^{\gamma} = 0 \\
\overset{6.2.14}{=}\ &2^{\gamma_1''} + \dots + 2^{\gamma_t''} \quad (\text{écriture binaire}) \qquad \square
\end{aligned}$$

Reste à démontrer la proposition 6.2.14.

Remarque-clé: pour montrer que $\alpha = \text{mex}\, S$ il suffit de montrer

(A) $\alpha \notin S$

et (B) si $\alpha' < \alpha$ alors $\alpha' \in S$.

Appelons $\alpha = 2^{\gamma_1} + \dots + 2^{\gamma_r}$. On veut montrer

$$2^{\gamma_1} + \dots + 2^{\gamma_r} = 2^{\gamma_1} \oplus \dots \oplus 2^{\gamma_r}$$

par induction transfinie sur α.

Or (6.2.13) affirme que

$$2^{\gamma_1} \oplus \dots \oplus 2^{\gamma_r} = \text{mex} \underbrace{\{ 2^{\gamma_1} \oplus \dots \oplus \beta_i \oplus \dots \oplus 2^{\gamma_r} \}}_{=:S}$$

↳ un 2^{γ_i} a été remplacé par un $\beta_i < 2^{\gamma_i}$

On veut montrer $\alpha = \text{mex}\, S$.

$\boxed{A}$ On veut montrer $\alpha \notin S$, c'est-à-dire $2^{\gamma_1} \oplus \dots \oplus \beta_i \oplus \dots \oplus 2^{\gamma_r} \neq \alpha$. $(\beta_i < 2^{\gamma_i})$

Écrivons β_i en binaire: $\beta_i = 2^{\gamma_1'} + \dots + 2^{\gamma_s'}$ $(\gamma_1' > \dots > \gamma_s')$

Par HI, (comme $\beta_i < 2^{\gamma_i} \leq \alpha$), $\beta_i = 2^{\gamma_1'} \oplus \dots \oplus 2^{\gamma_s'}$. ↳ $\gamma_i > \gamma_1'$ car $\beta_i < 2^{\gamma_i}$

Donc, comme dans le corollaire: $2^{\gamma_1} \oplus \dots \oplus \beta_i \oplus \dots \oplus 2^{\gamma_r} = \underbrace{2^{\gamma_1} \oplus \dots \oplus 2^{\gamma_{i-1}}}_{\text{ne change pas}} \oplus \underbrace{2^{\gamma_1''} \oplus \dots \oplus 2^{\gamma_t''}}_{\gamma_1'' > \dots > \gamma_t''}$

avec $\gamma_1 > \dots > \gamma_{i-1} > \underset{\text{n'apparaît pas}}{\textcircled{\gamma_i}} > \gamma_1'' > \dots > \gamma_t''$

Donc $2^{\gamma_1} + \dots + 2^{\gamma_{i-1}} + 2^{\gamma''_1} + \dots + 2^{\gamma''_t} < \alpha$

par comparaison des écritures binaires

Donc HI s'applique, et on a

$$2^{\gamma_1} + \dots + 2^{\gamma_{i-1}} + 2^{\gamma''_1} + \dots + 2^{\gamma''_t} = 2^{\gamma_1} \oplus \dots \oplus 2^{\gamma_{i-1}} \oplus 2^{\gamma''_1} \oplus \dots \oplus 2^{\gamma''_t}$$

ce qui montre que $2^{\gamma_1} \oplus \dots \oplus 2^{\gamma_{i-1}} \oplus 2^{\gamma''_1} \oplus \dots \oplus 2^{\gamma''_t} \neq \alpha$

Ceci montre que tout élément de S est $\neq \alpha$

donc que $\alpha \notin S$.

$\boxed{B}$ Soit $\alpha' < \alpha$, on veut montrer $\alpha' \in S$

α' s'écrit

$$\underbrace{2^{\gamma_1} + \dots + 2^{\gamma_{i-1}}}_{\text{partie commune entre les écritures binaires de } \alpha \text{ et } \alpha'} + \underbrace{2^{\gamma''_1}}_{\text{première différence}} + \dots + 2^{\gamma''_t}$$

On a $\gamma_1 > \dots > \gamma_{i-1} > \boxed{\gamma_i} > \gamma''_1 > \dots > \gamma''_t$

n'apparaît pas dans α'

par comparaison des écritures binaires.

Par HI, $\alpha' = 2^{\gamma_1} \oplus \dots \oplus 2^{\gamma_{i-1}} \oplus 2^{\gamma''_1} \oplus \dots \oplus 2^{\gamma''_t}$

On "ajoute" deux fois $2^{\gamma_{i+1}} \oplus \dots \oplus 2^{\gamma_r}$ (et on applique $\xi \oplus \xi = 0$) + associativité + commutativité

On obtient

$$\alpha' = 2^{\gamma_1} \oplus \dots \oplus \beta_i \oplus \dots \oplus 2^{\gamma_r}$$

$$\beta_i = 2^{\gamma'_1} \oplus \dots \oplus 2^{\gamma'_s} \quad \text{où} \quad \gamma_i > \gamma'_1 > \dots > \gamma'_s$$

par HI,

$$\beta_i = 2^{\gamma'_1} + \dots + 2^{\gamma'_s}$$

donc $\alpha' \in S$ $\square$

Blaise = L = Left player = bleu
Roxane = R = Right player = rouge

Chapitre 7. Survol de la théorie des jeux combinatoires (bien-fondés) partisans

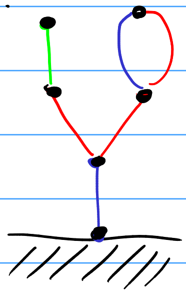
Le jeu est maintenant défini par un graphe (orienté, bien-fondé) dont les arêtes peuvent être de trois sortes (exclusives):

- arêtes bleues: utilisables par Blaise uniquement
- arêtes rouges: utilisables par Roxane uniquement
- arêtes vertes (impartiales): utilisables par les deux

(vert = rouge + bleu)

Exemple de tel jeu:

"Hackenbush"

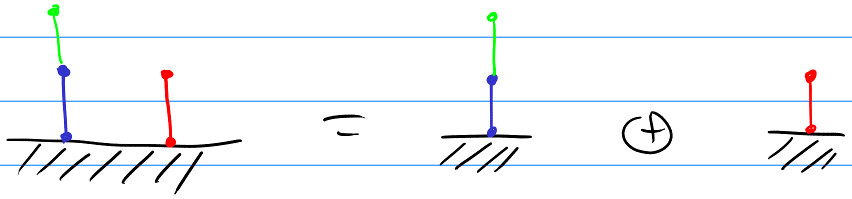


chaque joueur efface 1 arête
- les rouges ne peuvent être effacés que par Roxane
- les bleues que par Blaise
- les verts par les deux
- une arête qui n'est plus reliée au "sol" disparaît

Quatre possibilités d'existence de stratégie:

↓si L commence \ si R commence →	L a une s.g. si R commence	R a une s.g. si R commence	
R a une s.g. si L commence	Le second joueur a une s.g. On note $G \doteq 0$ "nul au sens de Conway"	R a une s.g. noté $G < 0$ "négatif strict"	$G \leq 0$
L a une s.g. si L commence	L a une s.g. noté $G > 0$ "positif strict"	Le 1er joueur a une s.g. noté $G \parallel 0$ "flou"	$G \mathrel{|\!\rhd} 0$
	$G \geq 0$	$G \mathrel{\lhd\!|} 0$	

La somme disjonctive (+) de jeux partisans se définit de façon analogue aux jeux impartiaux: faire un coup dans la somme se fait en faisant un coup dans une et une seule des composantes de la somme, autorisé par le joueur en question.



Prop (7.1.7) : la somme disjonctive de deux jeux nuls au sens de Conway ($\doteq 0$) est encore nulle

La somme de deux jeux >0 est >0

La somme d'un jeu >0 et d'un jeu $\doteq 0$ est >0

La somme de deux jeux <0 est <0

La somme d'un jeu <0 et d'un jeu $\doteq 0$ est <0

La somme d'un jeu $\| 0$ et d'un jeu $\doteq 0$ est $\| 0$

$G = G_1 + G_2$

$\downarrow G_1 \setminus \overrightarrow{G_2}$	$G_2 \doteq 0$	$G_2 > 0$	$G_2 < 0$	$G_2 \| 0$
$G_1 \doteq 0$	$G \doteq 0$	$G > 0$	$G < 0$	$G \| 0$
$G_1 > 0$	$G > 0$	$G > 0$		
$G_1 < 0$	$G < 0$		$G < 0$	
$G_1 \| 0$	$G \| 0$			

L'opposé d'un jeu partisan s'obtient en échangeant les couleurs des deux joueurs, on le note $-G$.

Prop : $G + (-G) \doteq 0$.

et $G > 0 \iff (-G) < 0$

On définit alors
$G > H$ lorsque $G + (-H) > 0$
$G < H$ lorsque $G + (-H) < 0$
$G \doteq H$ lorsque $G + (-H) \doteq 0$
↑ égal au sens de Conway
$G \| H$ lorsque $(G + (-H)) \| 0$
↑ " confus "

Dans le cas des jeux impartiaux, $\begin{cases} G \doteq H \text{ signifie } gr(G) = gr(H) \\ G \| H \text{ signifie } gr(G) \neq gr(H) \end{cases}$

Prop (7.19) : $\doteq$ est une relation d'équivalence, elle est compatible à la somme (si $G \doteq G'$ et $H \doteq H'$ alors $G + H \doteq G' + H'$)

ainsi qu'aux relations $>$, $<$, $\|$, etc.
(si $G \doteq G'$ et $H \doteq H'$ et $G > H$ alors $G' > H'$).
etc.

Si on appelle <u>valeur</u> d'un jeu partisan sa classe d'équivalence pour la relation $\doteq$, les valeurs forment un groupe abélien partiellement ordonné par $\leq$,

(c'est-à-dire : associativité, commutativité, $0+x = x+0 = x$

↑ (valeur du jeu trivial)

$x + (-x) = 0$

$x \leq y$ et $y \leq z \Rightarrow x \leq z$

$x \leq x$, $x \leq y$ et $y \leq x \Rightarrow x = y$

si $0 \leq x$ et $0 \leq y$ alors $0 \leq x + y$)