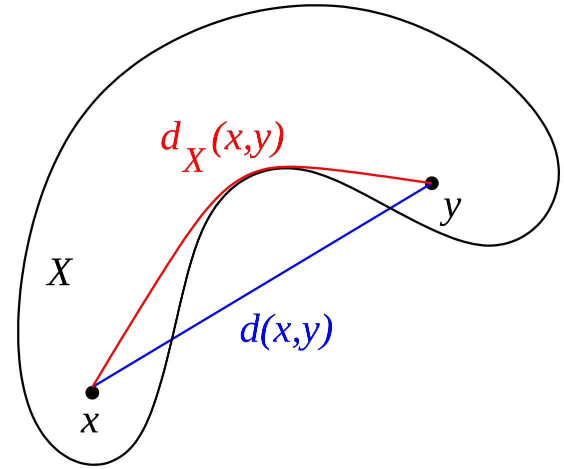
Morphologie mathématique - II

Isabelle Bloch

http://perso.telecom-paris.fr/bloch

LTCI, Télécom ParisTech, Institut Polytechnique de Paris

Opérateurs géodésiques



Distance géodésique, conditionnelle à X : d_X

- si X est fermé, il existe un arc géodésique pour toute paire de points de X
- unicité si X est simplement connexe
- X convexe $\Leftrightarrow\ d_X = d$

Boule géodésique : $B_X(x,r) = \{y \in X \mid d_X(x,y) \leq r\}$
Rq : $B_X(x,r) \subseteq B(x,r)$

Dilatation géodésique :

$$D_X(Y, B_r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid B_X(x,r) \cap Y \neq \emptyset\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d_X(x,Y) \leq r\}$$

Erosion géodésique :

$$E_X(Y, B_r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid B_X(x,r) \subseteq Y\} = X \setminus D_X(X \setminus Y, B_r)$$

Ouverture et fermeture géodésiques : par composition

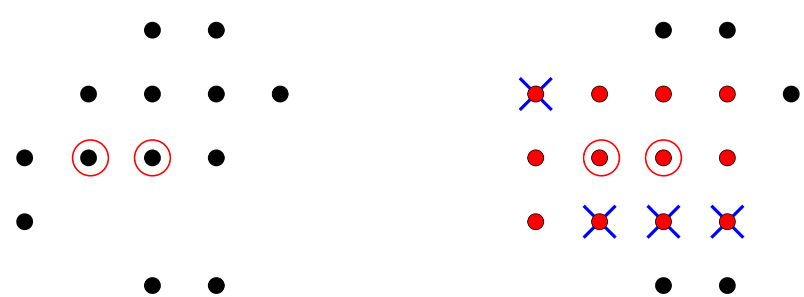
Propriétés et reconstruction

Propriétés :

- similaires à celles du cas euclidien
- $D_X(Y, B_r) \subseteq D(Y, B_r)$
- $D_X(Y, B_r) = \cap_{n=1}^{\infty} [(Y \oplus \frac{r}{n} B) \cap X]^n$

Cas discret :

$$D_X(Y, B_r) = [D(Y, B_1) \cap X]^r$$

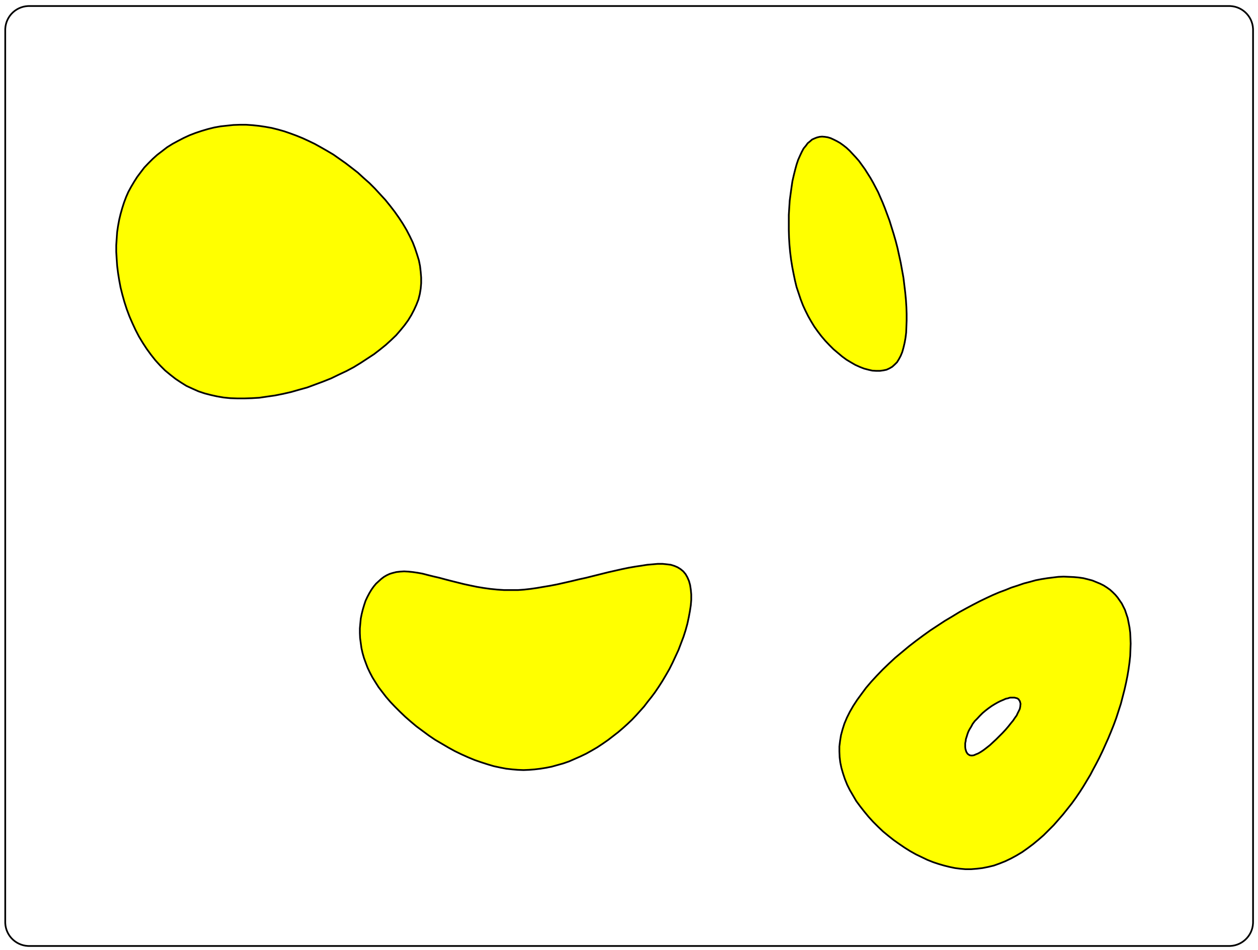


Reconstruction :

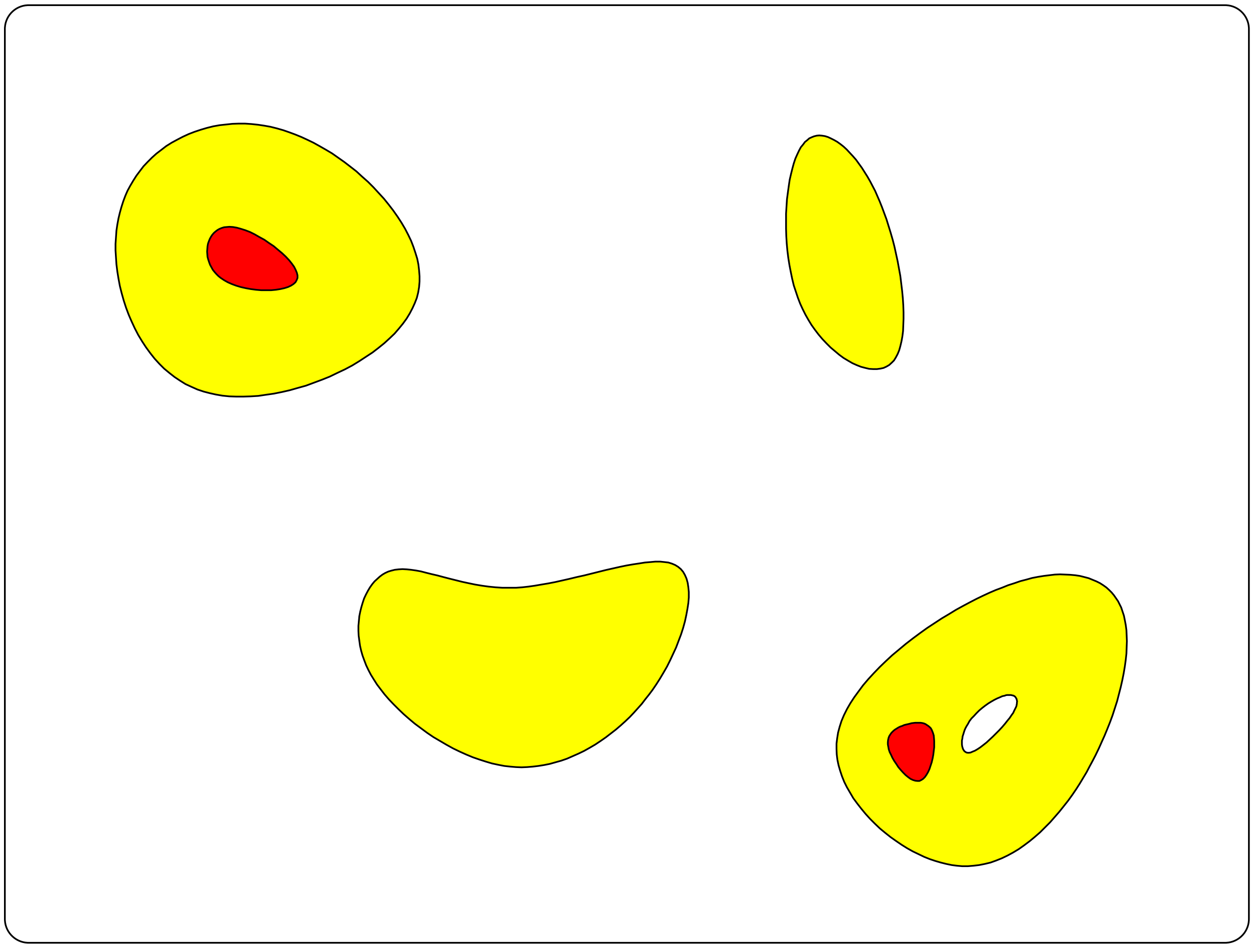
$$[D(Y, B_1) \cap X]^{\infty} = D_X^{\infty}(Y)$$

= composantes connexes de X qui intersectent Y

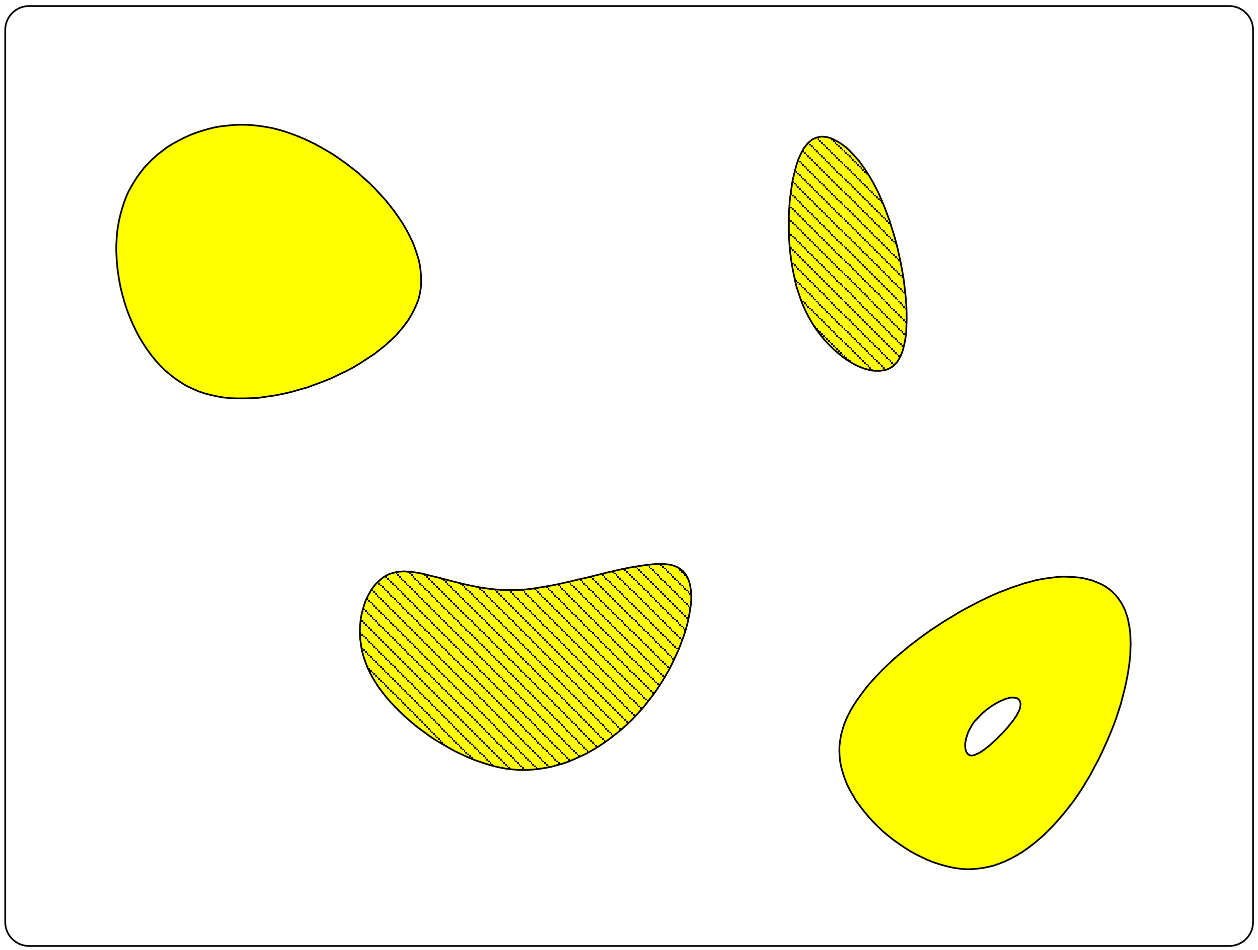
Reconstruction binaire : exemple



Reconstruction binaire : exemple



Reconstruction binaire : exemple

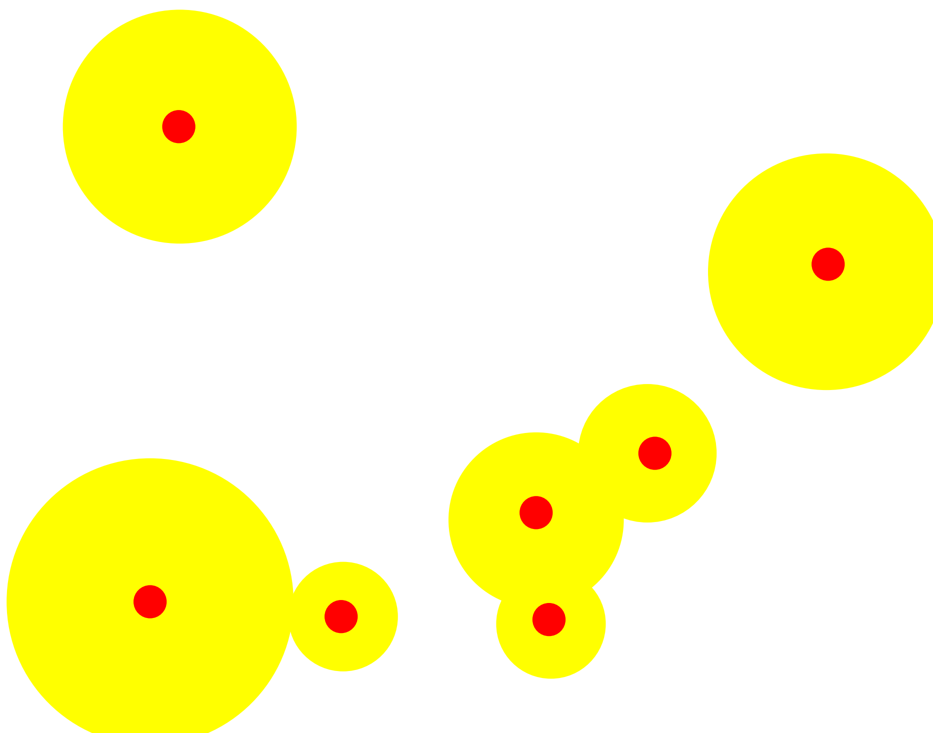


Erodés ultimes

$$EU(X) = \cup_n \{E(X, B_n) \setminus R[E(X, B_{n+1}); E(X, B_n)]\}$$

- $E(X, B_n)$: l'érodé de X de taille n
- $R[Y; Z]$: composantes connexes de Z qui ont une intersection non vide avec Y

= ensemble des maxima régionaux de la fonction distance $d(x, X^C)$.



Opérateurs géodésiques fonctionnels

$$X_1 \subseteq X_2 \text{ et } Y_1 \subseteq Y_2 \;\Rightarrow\; D_{X_1}(Y_1, B_r) \subseteq D_{X_2}(Y_1, B_r) \subseteq D_{X_2}(Y_2, B_r)$$

$\Rightarrow$ Extension aux fonctions, pour $f \leq g$, coupe par coupe :

$$[D_g(f, B_r)]_\lambda = D_{g_\lambda}(f_\lambda, B_r)$$

(avec $f_\lambda = \{x,\ f(x) \geq \lambda\}$)

Cas discret :

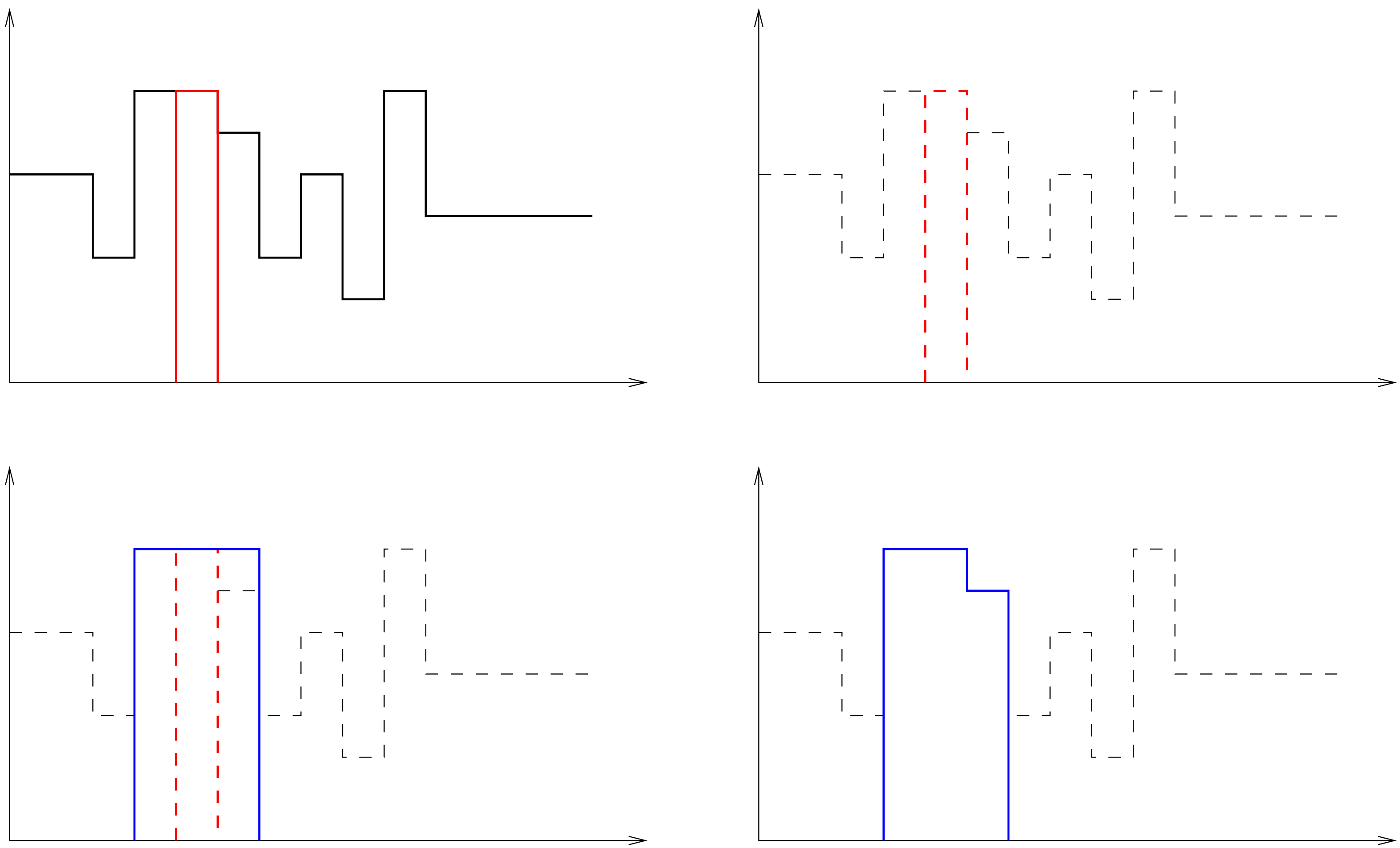
$$D_g(f, B_r) = [D(f, B_1) \wedge g]^r$$

$$E_g(f, B_r) = [E(f, B_1) \vee g]^r$$

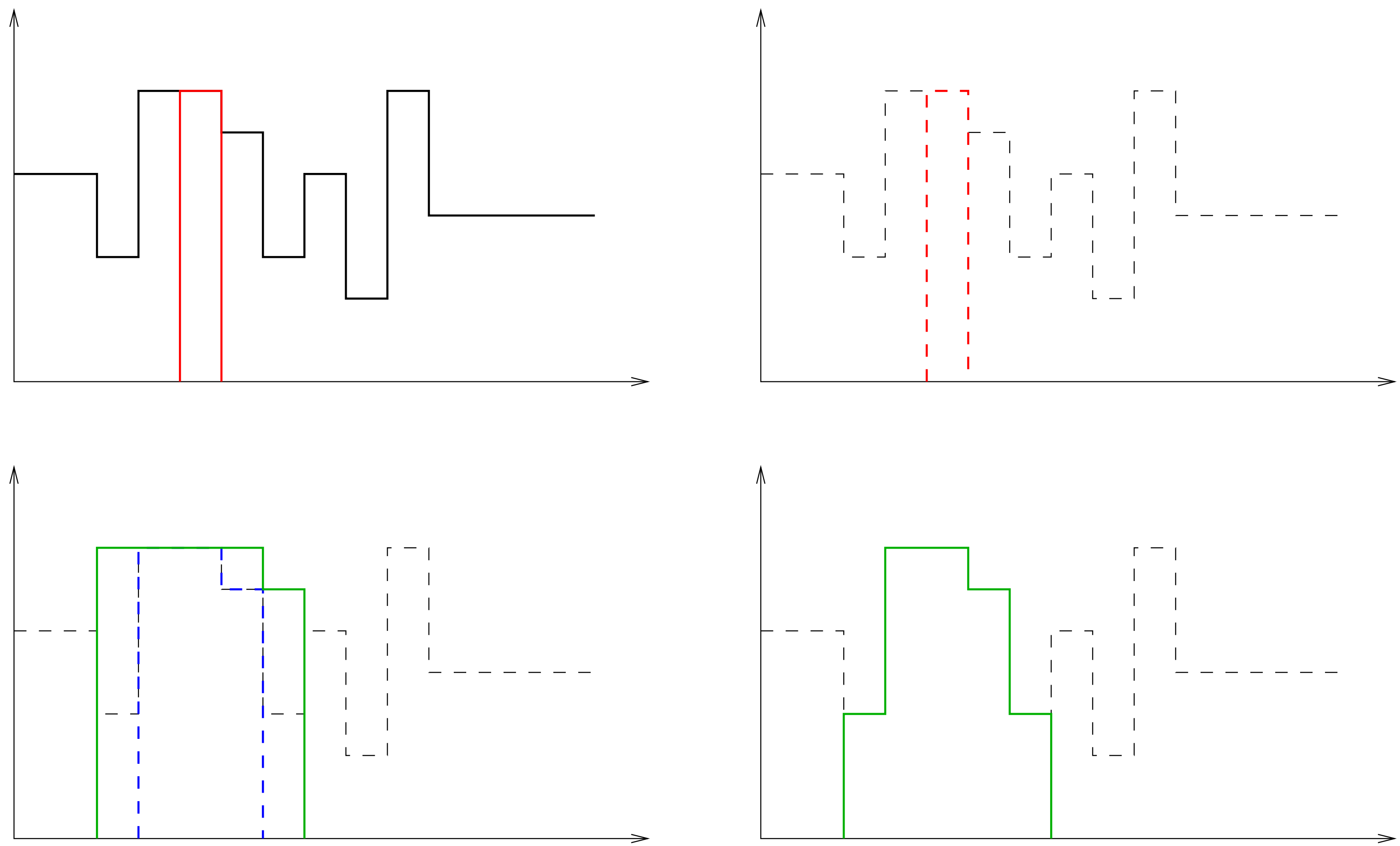
Reconstruction numérique de f (fonction de marquage) dans g :

- par dilatation $D_g(f, B_\infty) = D_g^\infty(f)$: ouverture
- par érosion $E_g(f, B_\infty)$: fermeture
- ouverture par reconstruction : $D_f^\infty(f_B)$ (zones plates dont les contours sont certains contours de l'image originale $\Rightarrow$ compression)

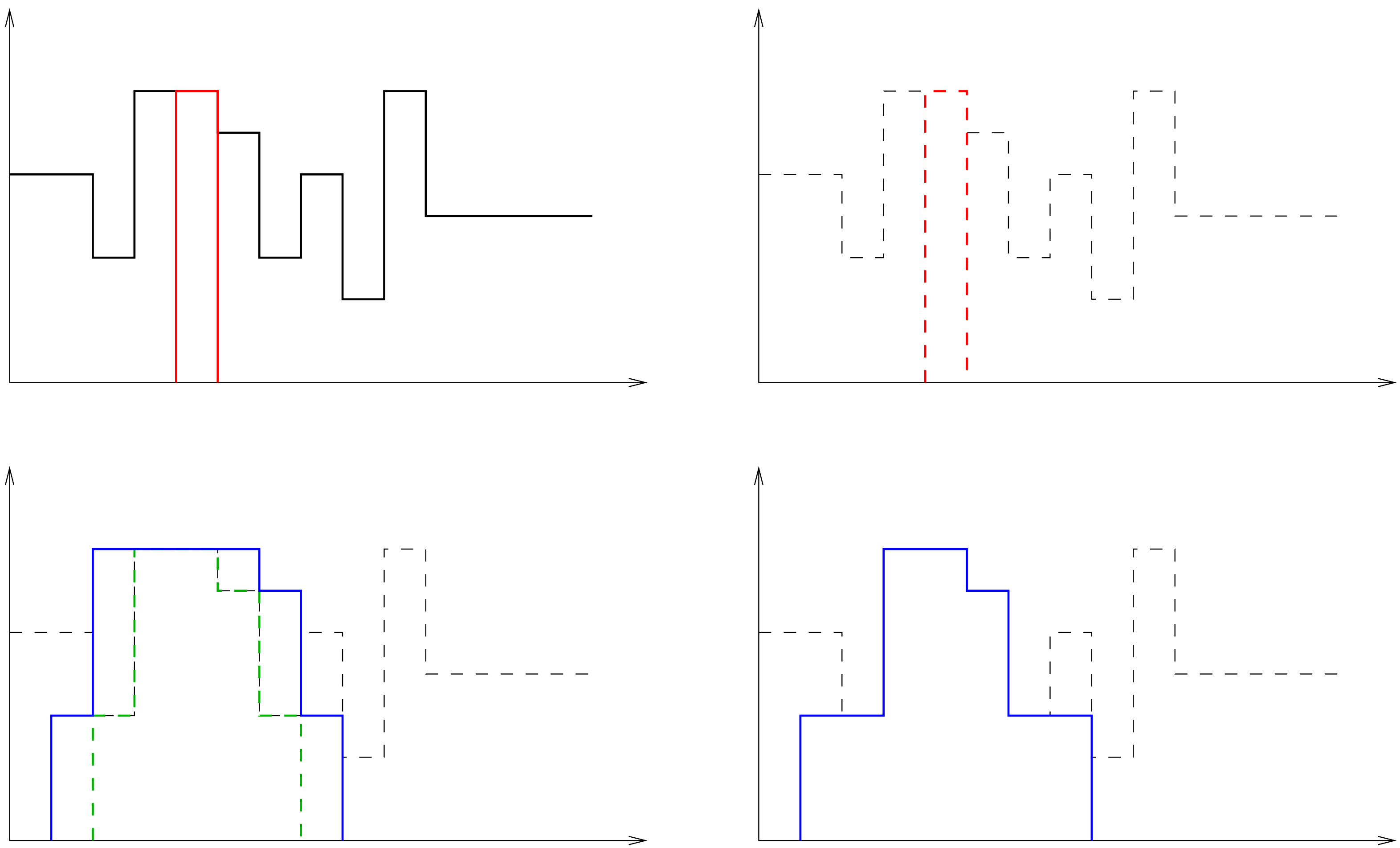
Reconstruction numérique : exemple



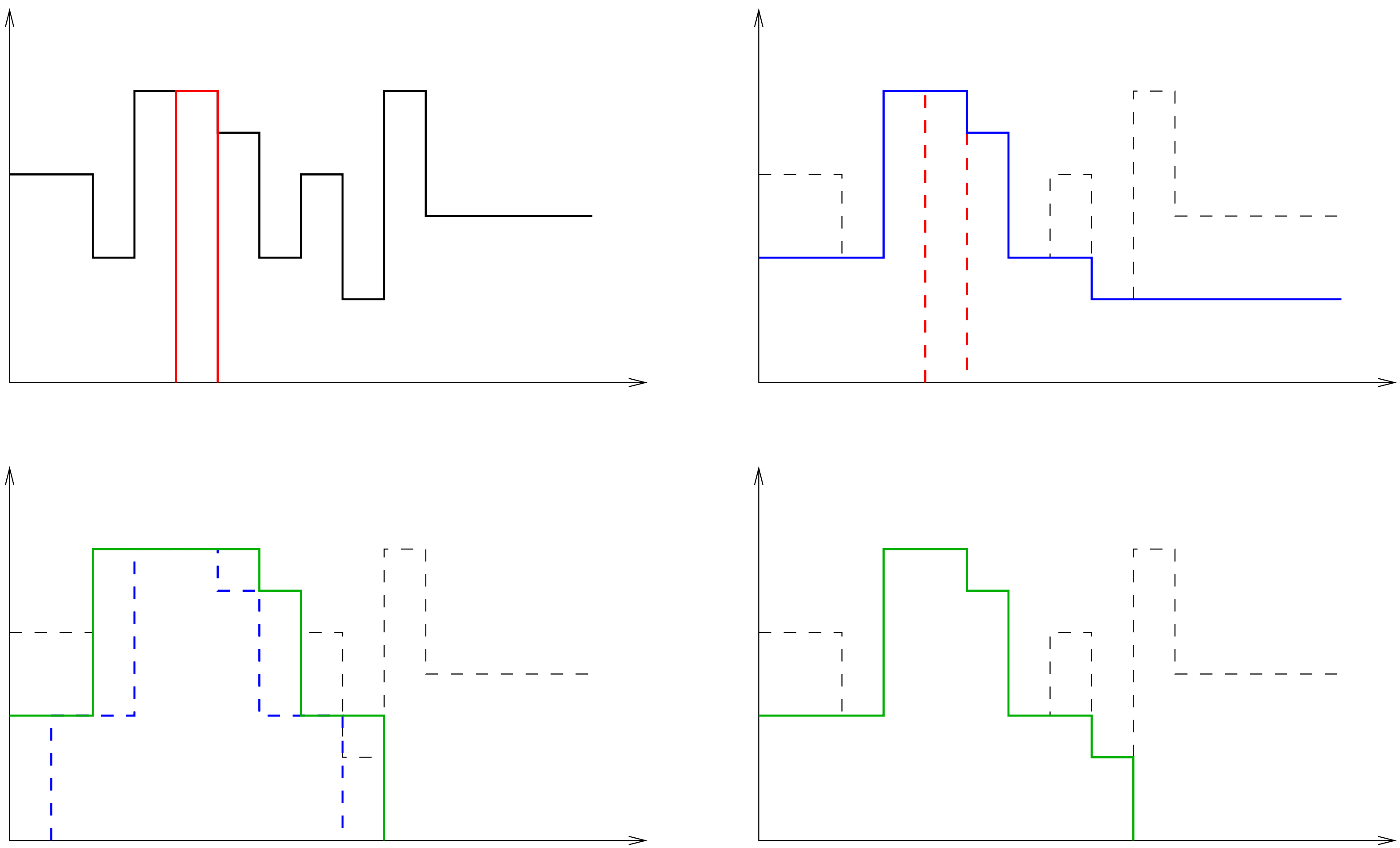
Reconstruction numérique : exemple



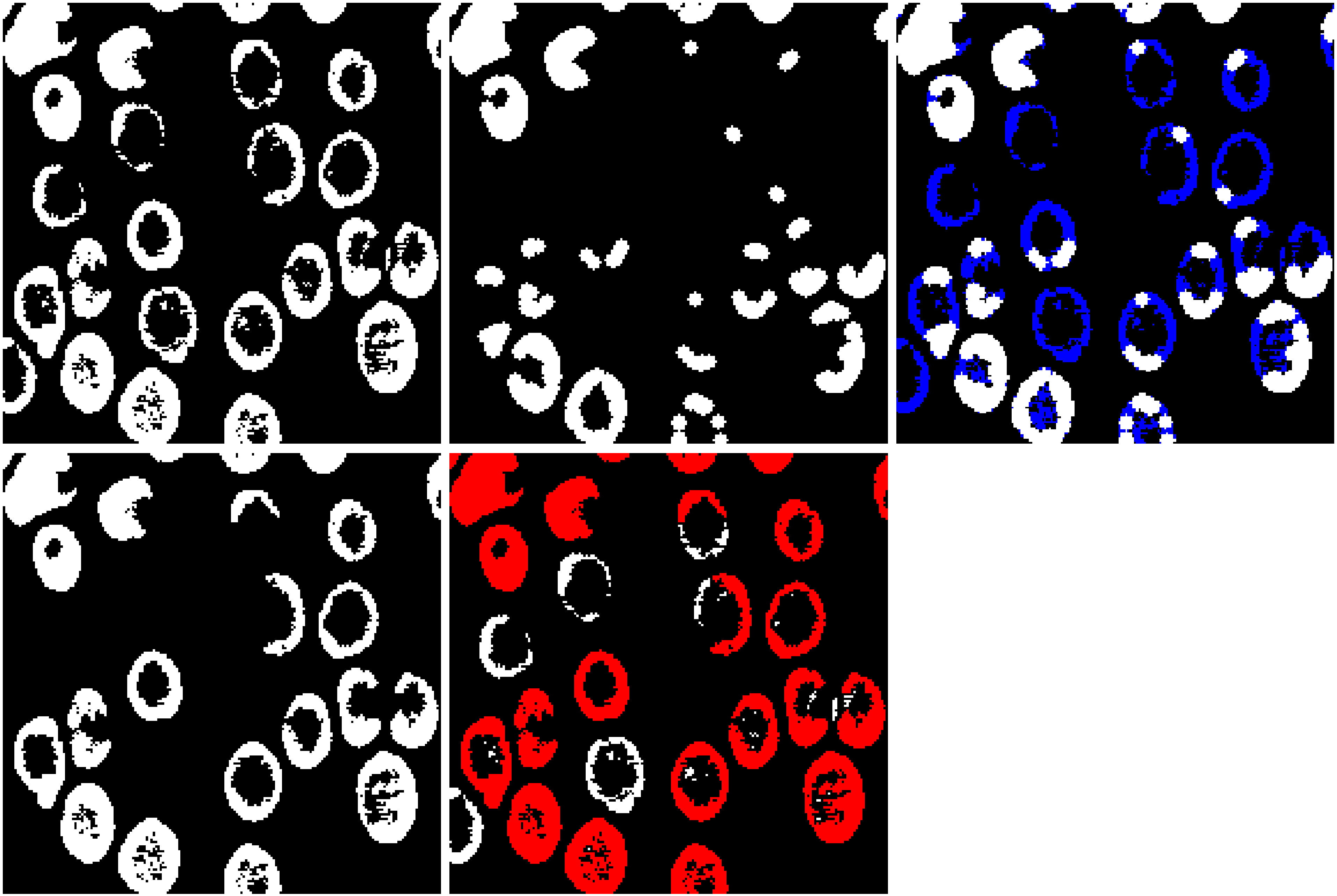
Reconstruction numérique : exemple



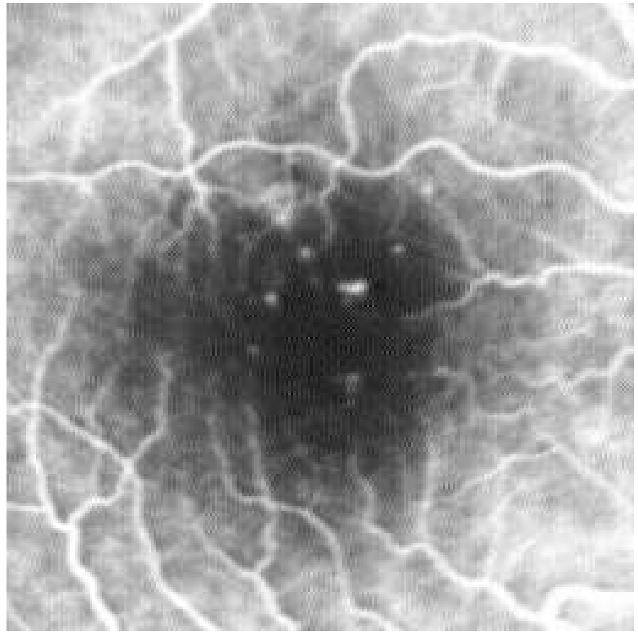
Reconstruction numérique : exemple

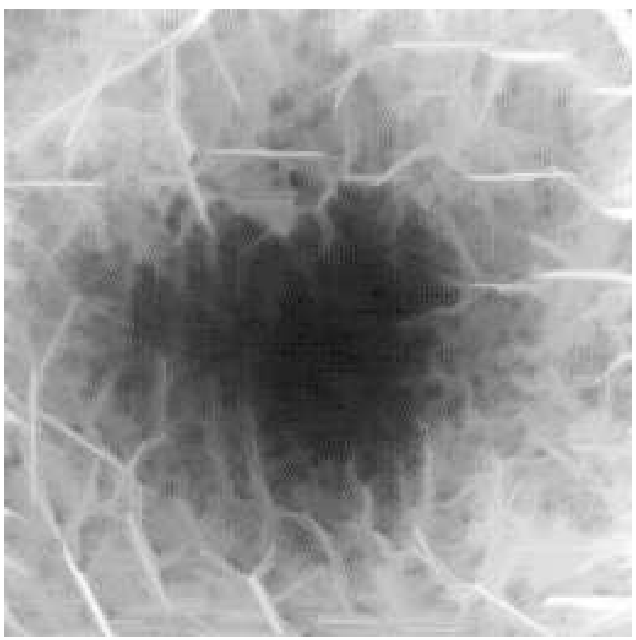


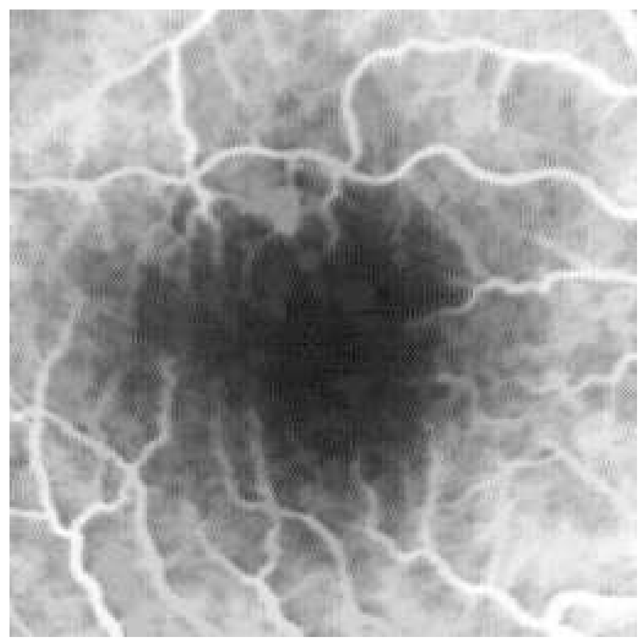
Ouverture par reconstruction : exemples



Ouverture par reconstruction : exemples

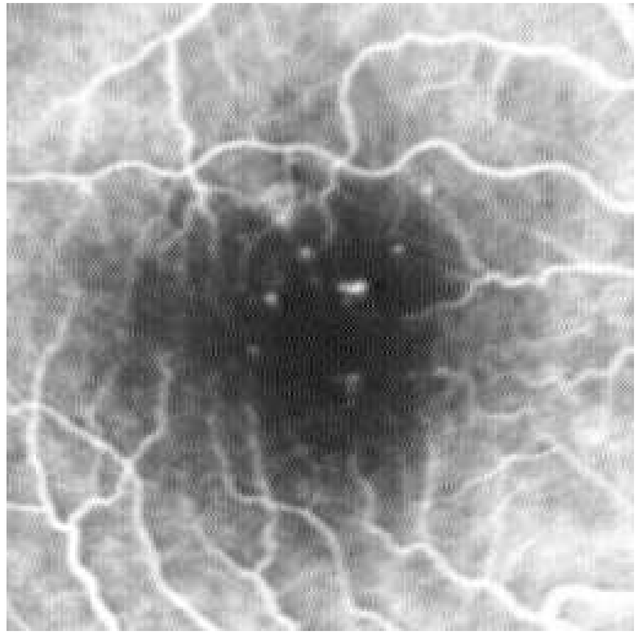




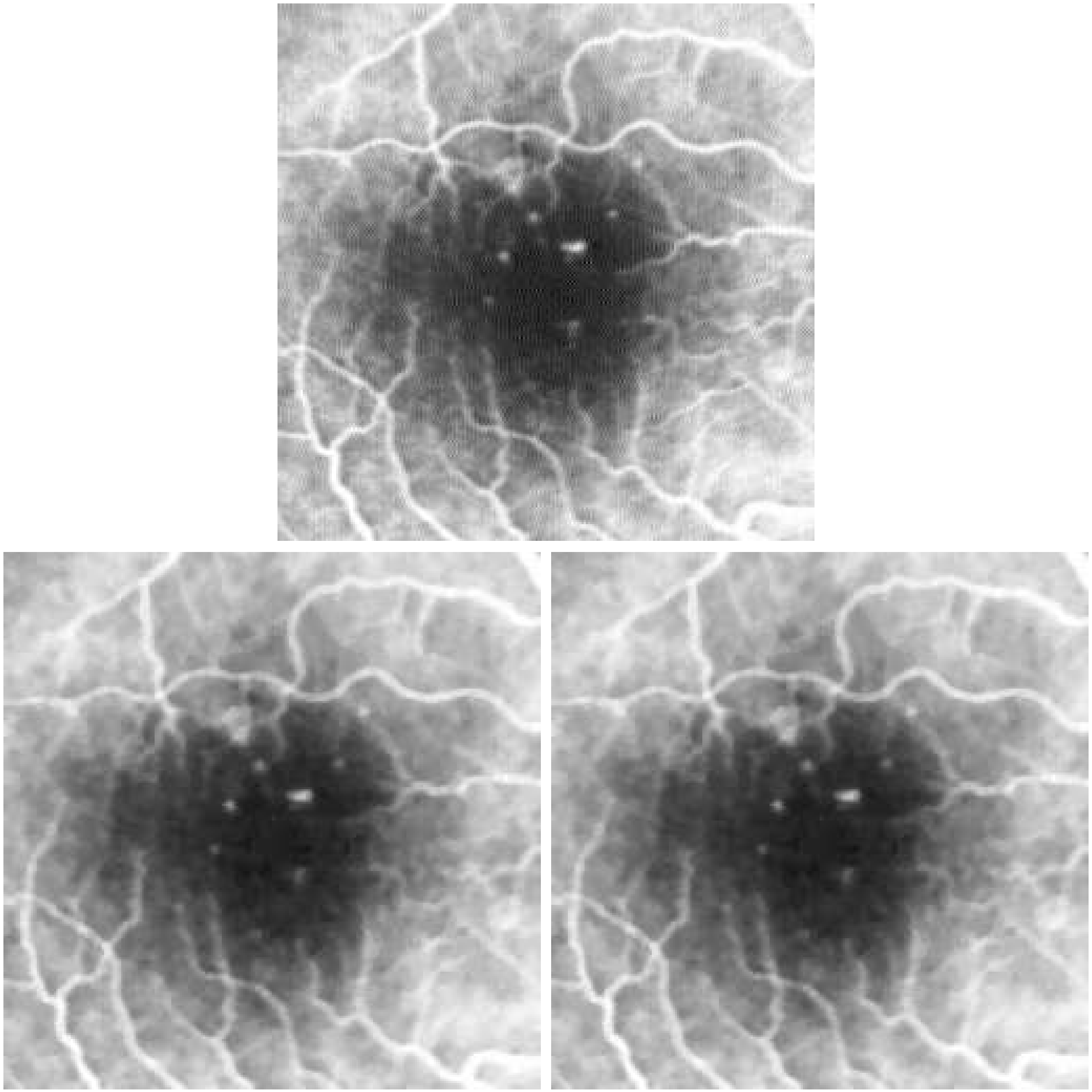


Réunion d'ouvertures par des segments de longueur 20 et reconstruction

Application au filtrage alterné séquentiel

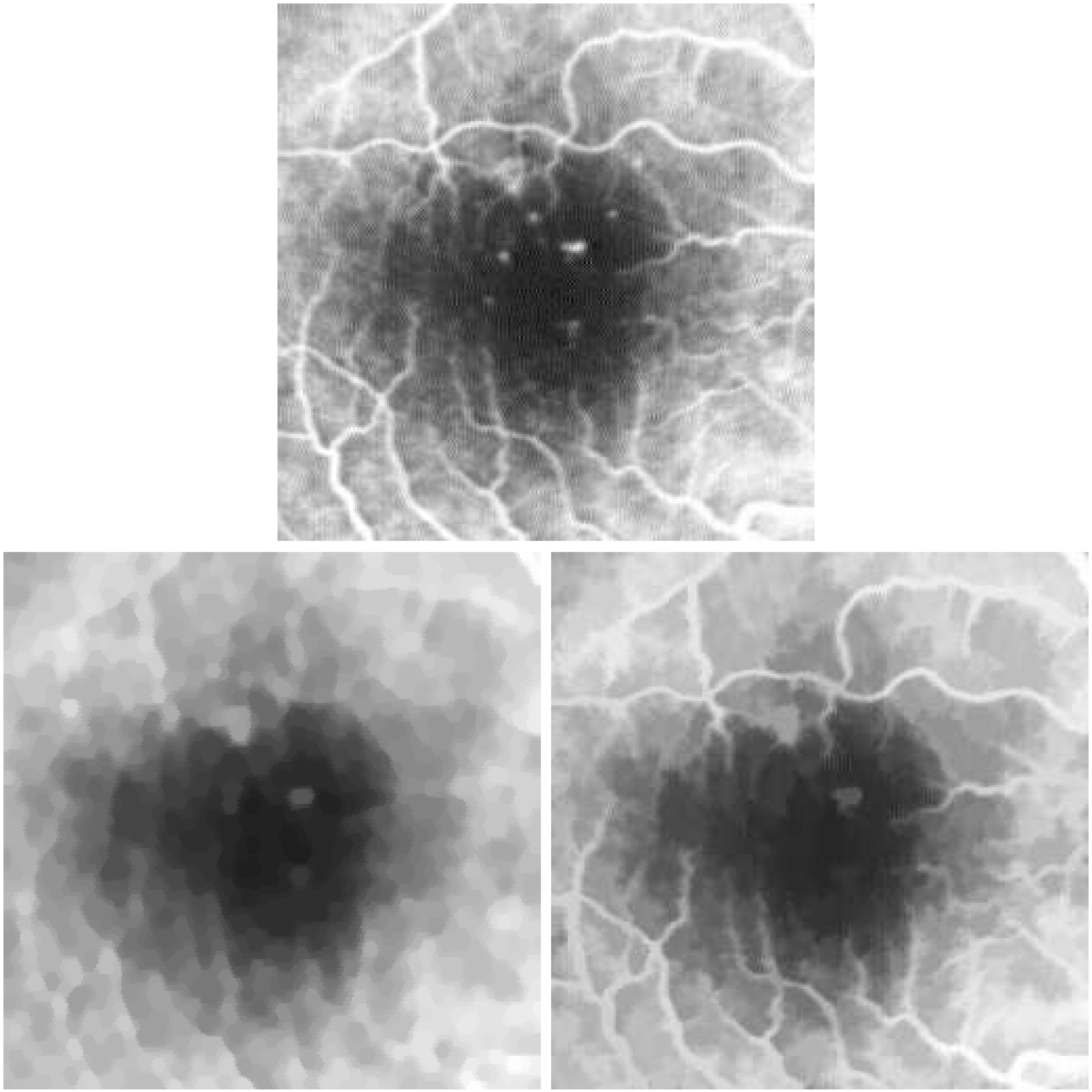


Application au filtrage alterné séquentiel



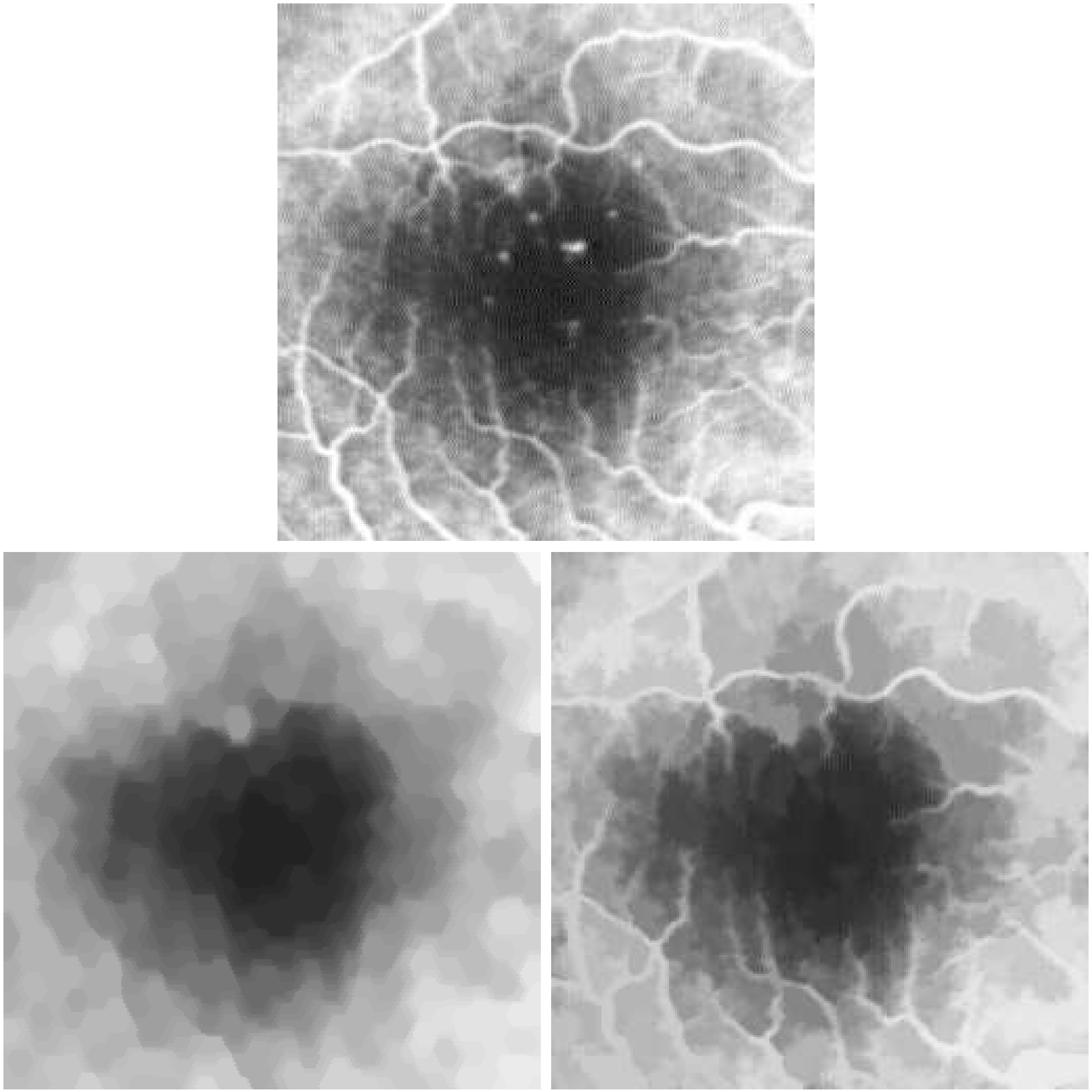
FAS par un hexagone (taille maximale = 1)

Application au filtrage alterné séquentiel



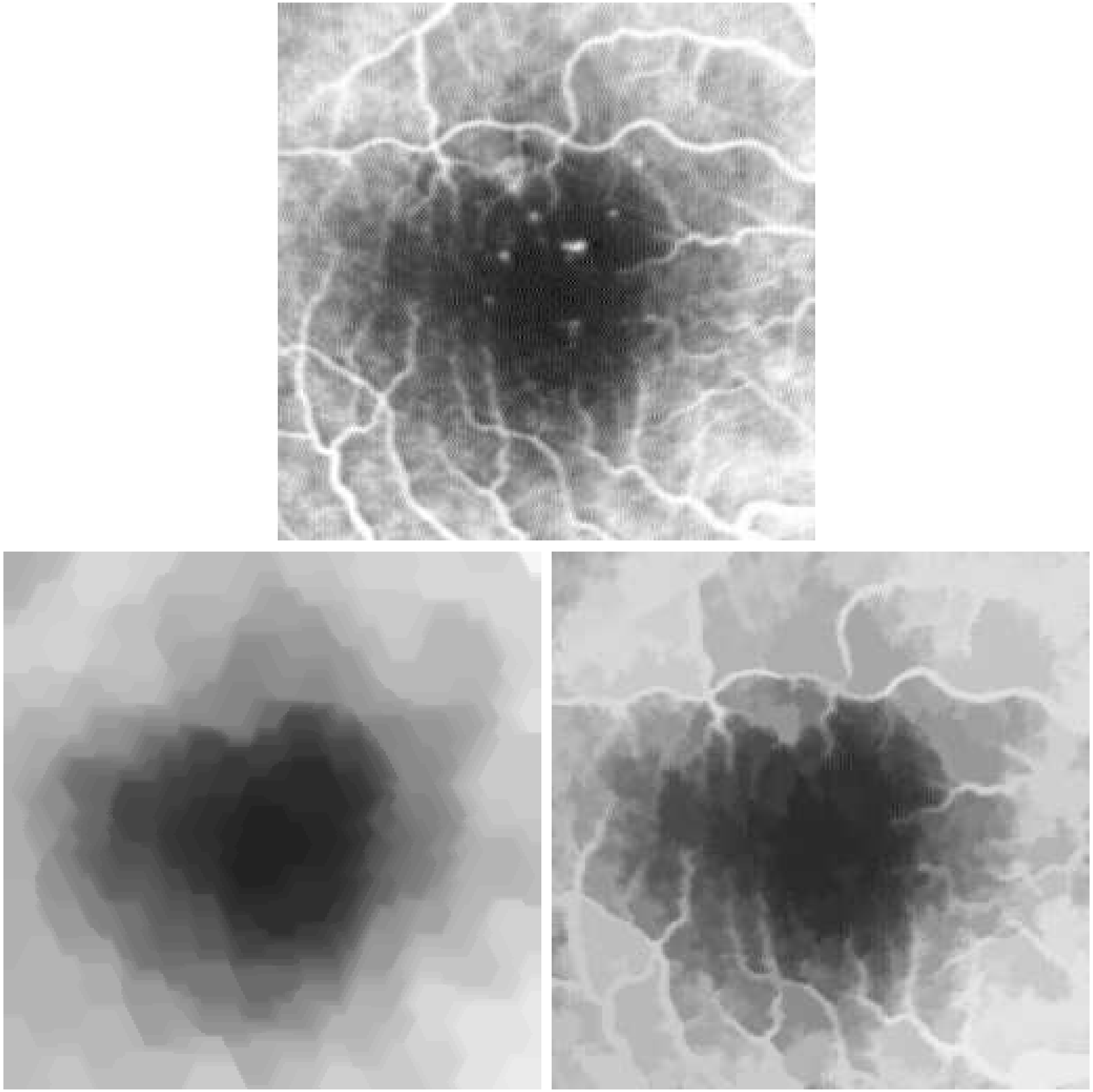
FAS par un hexagone (taille maximale = 3)

Application au filtrage alterné séquentiel



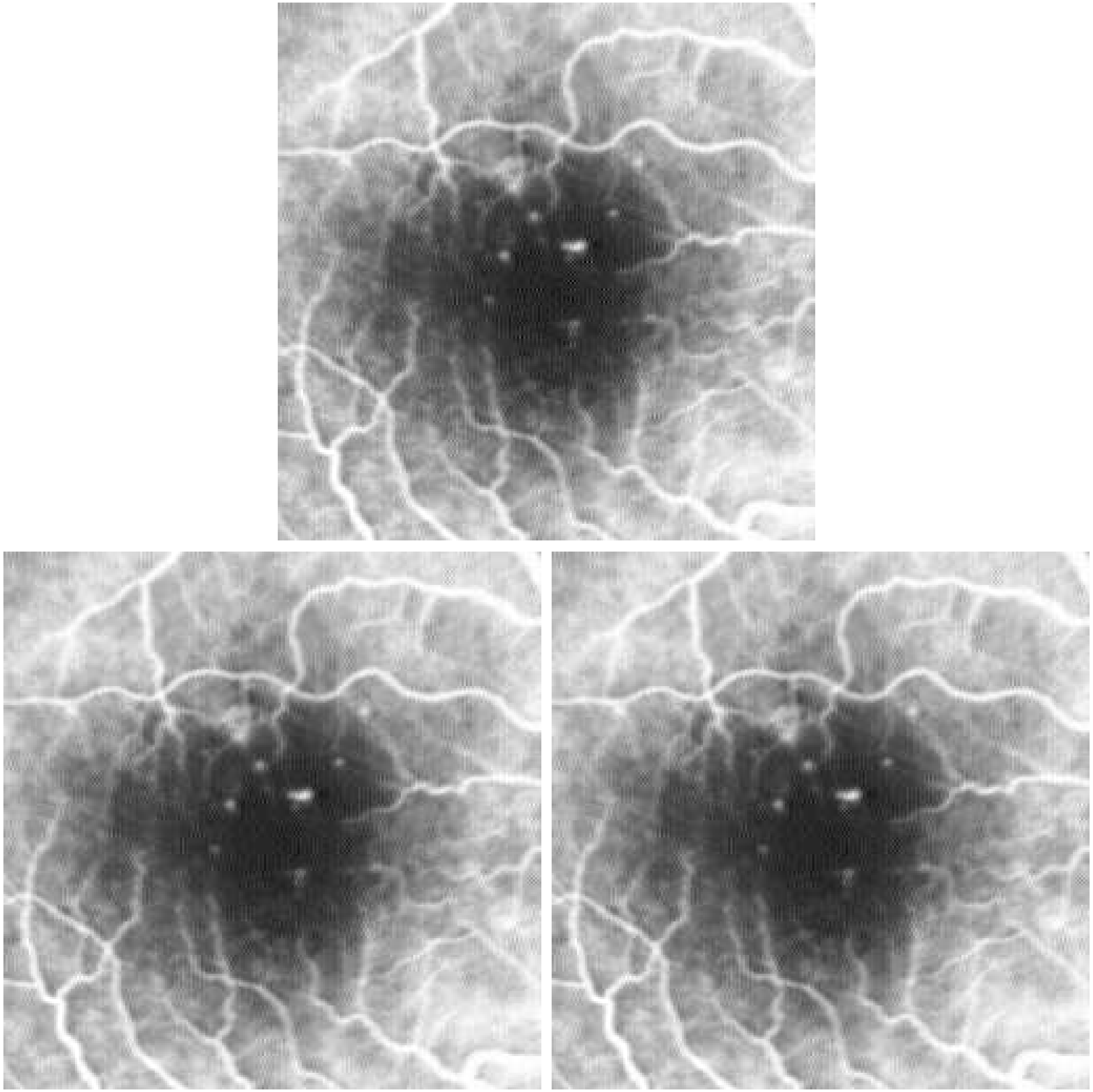
FAS par un hexagone (taille maximale = 5)

Application au filtrage alterné séquentiel



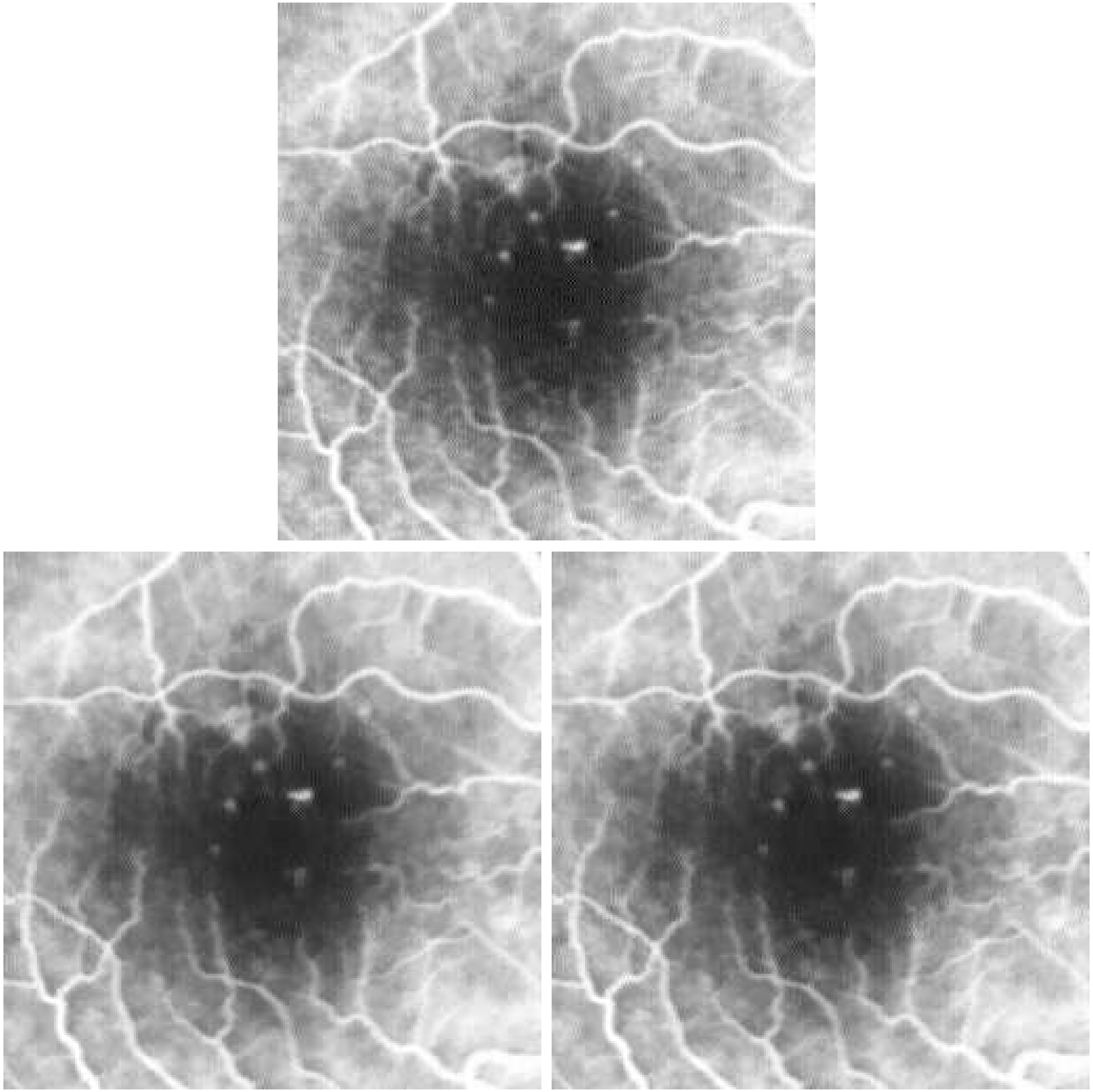
FAS par un hexagone (taille maximale = 9)

Application au filtrage alterné séquentiel



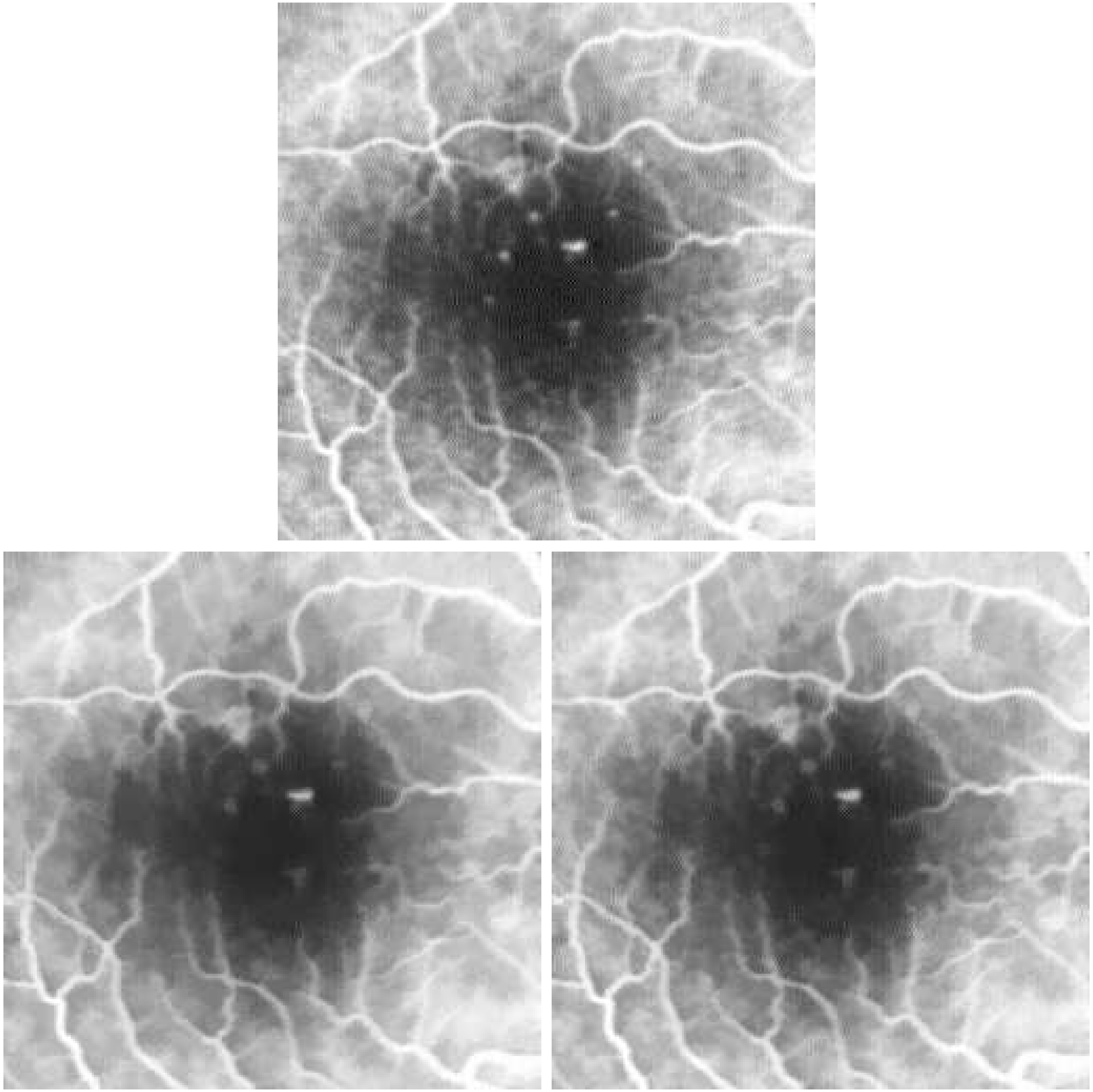
FAS par des segments (taille maximale = 1)

Application au filtrage alterné séquentiel



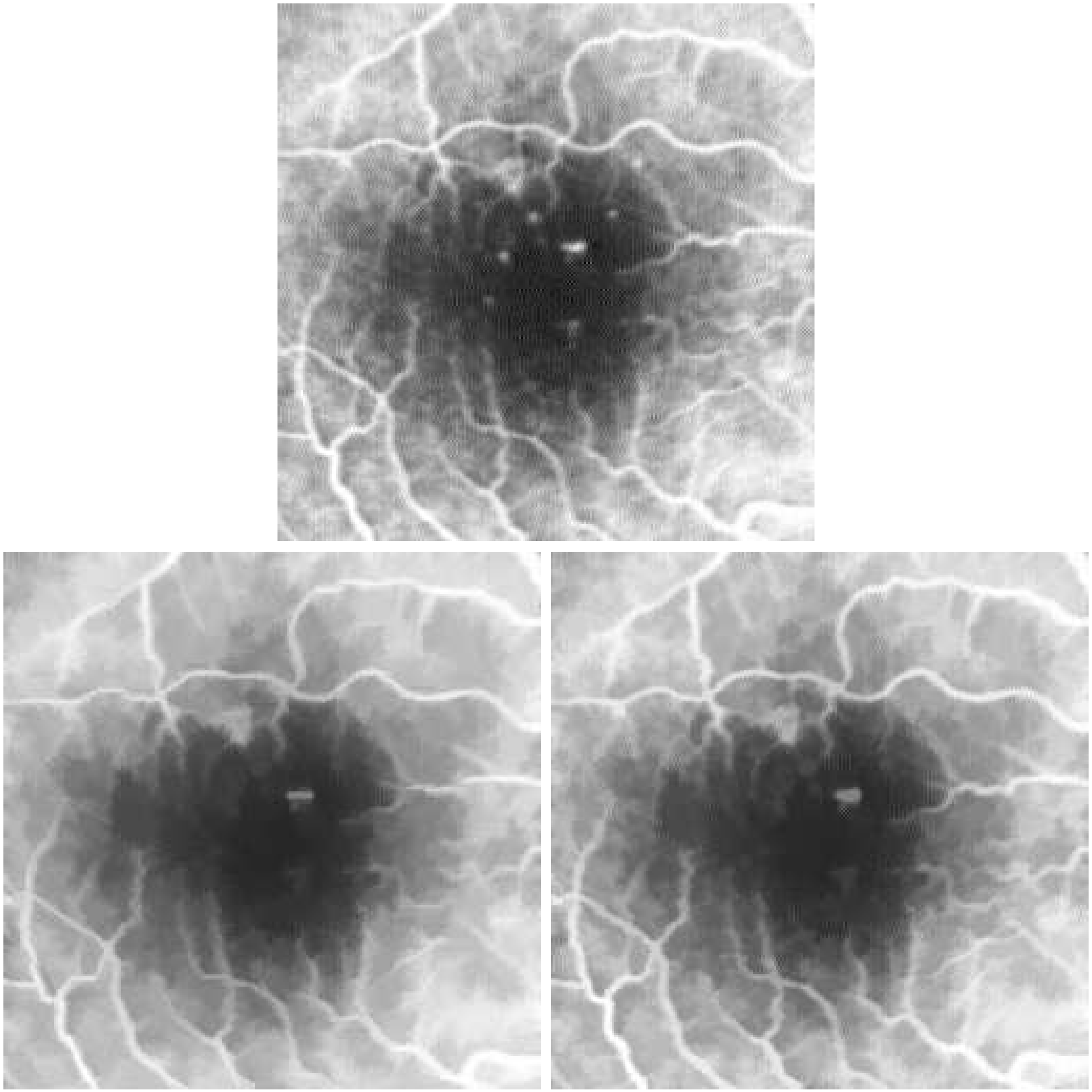
FAS par des segments (taille maximale = 3)

Application au filtrage alterné séquentiel



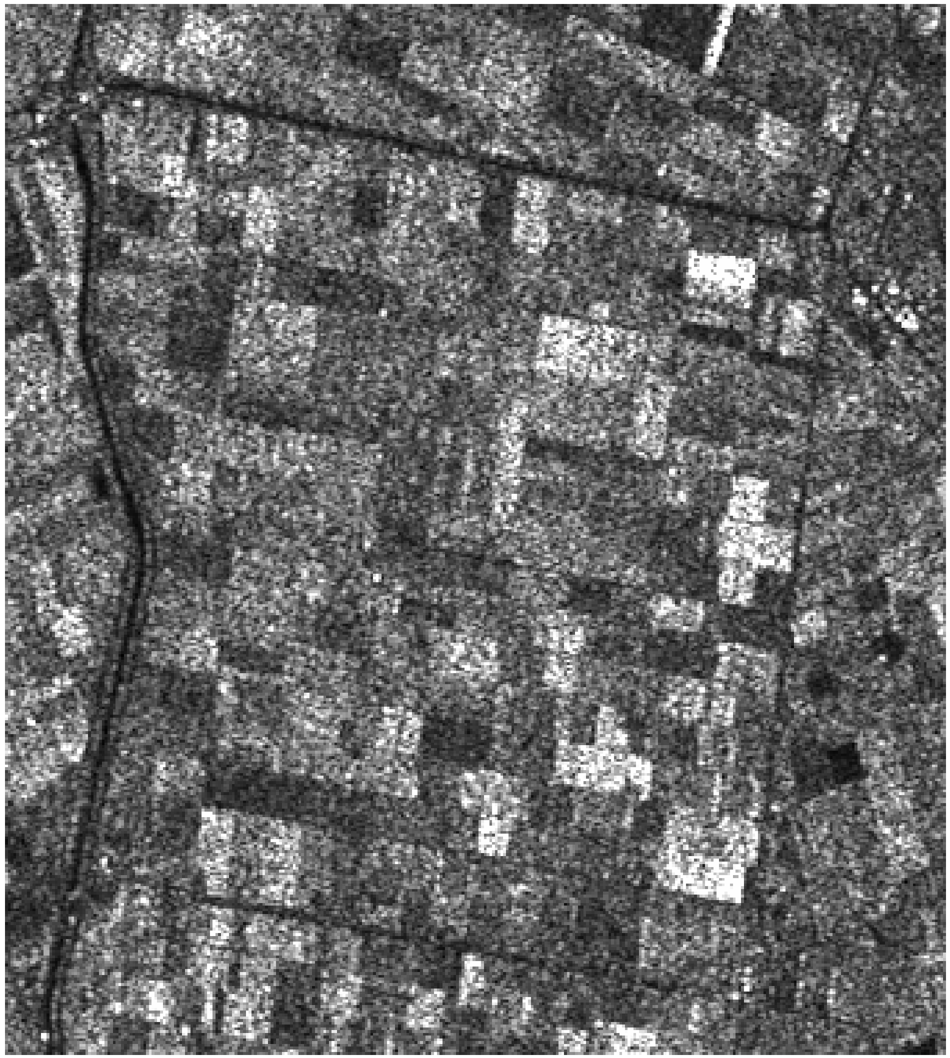
FAS par des segments (taille maximale = 5)

Application au filtrage alterné séquentiel

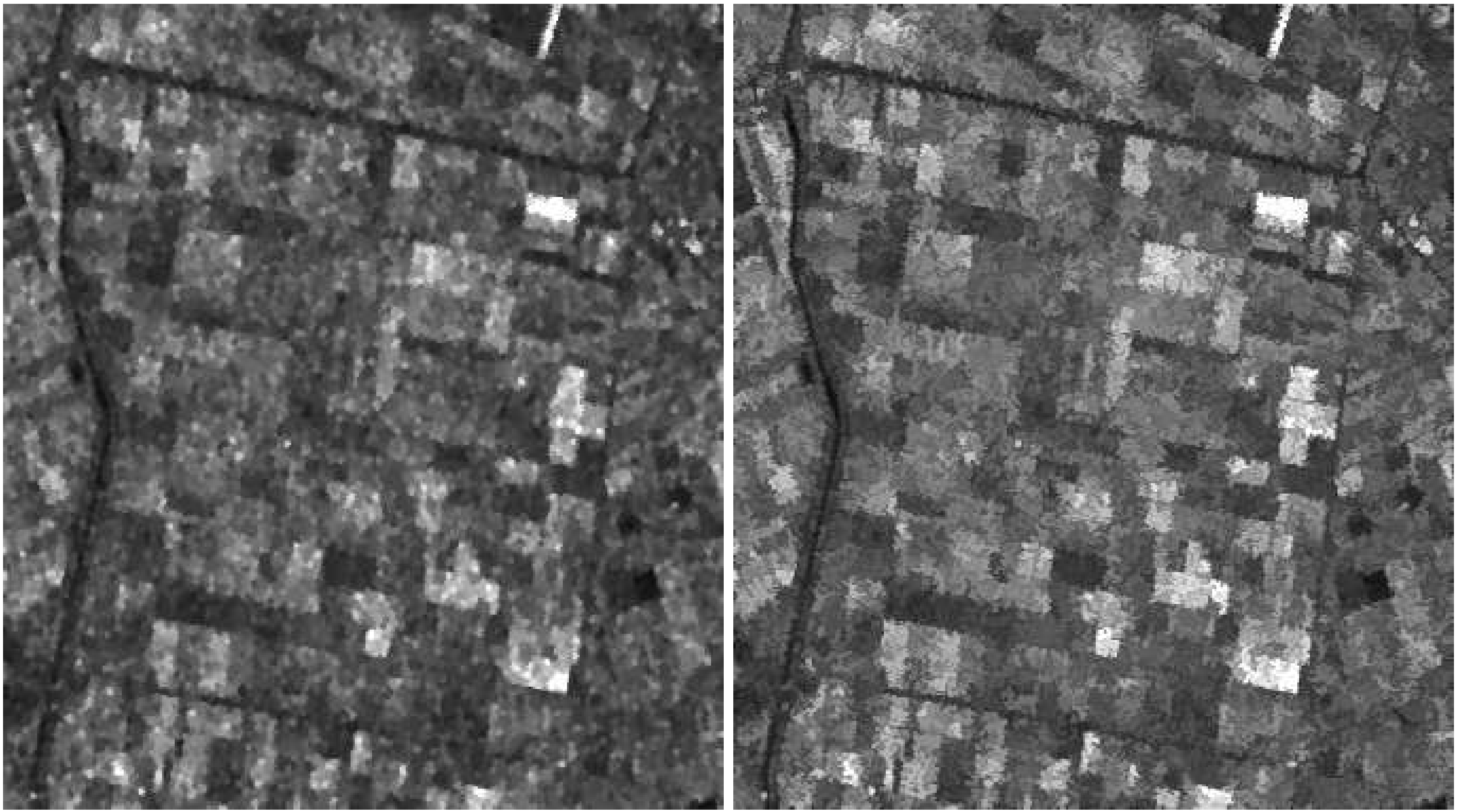


FAS par des segments (taille maximale = 9)

Un autre exemple

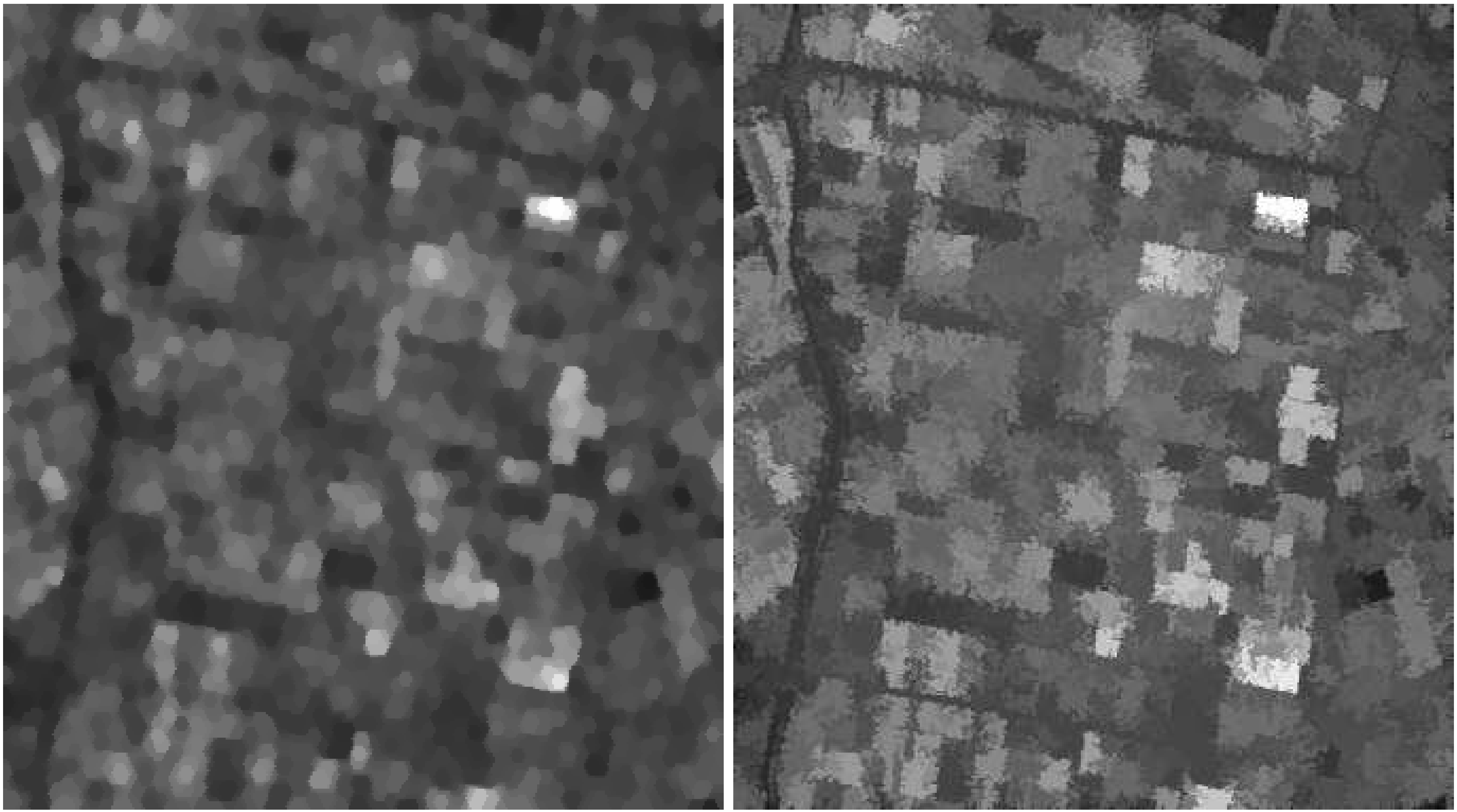


Un autre exemple



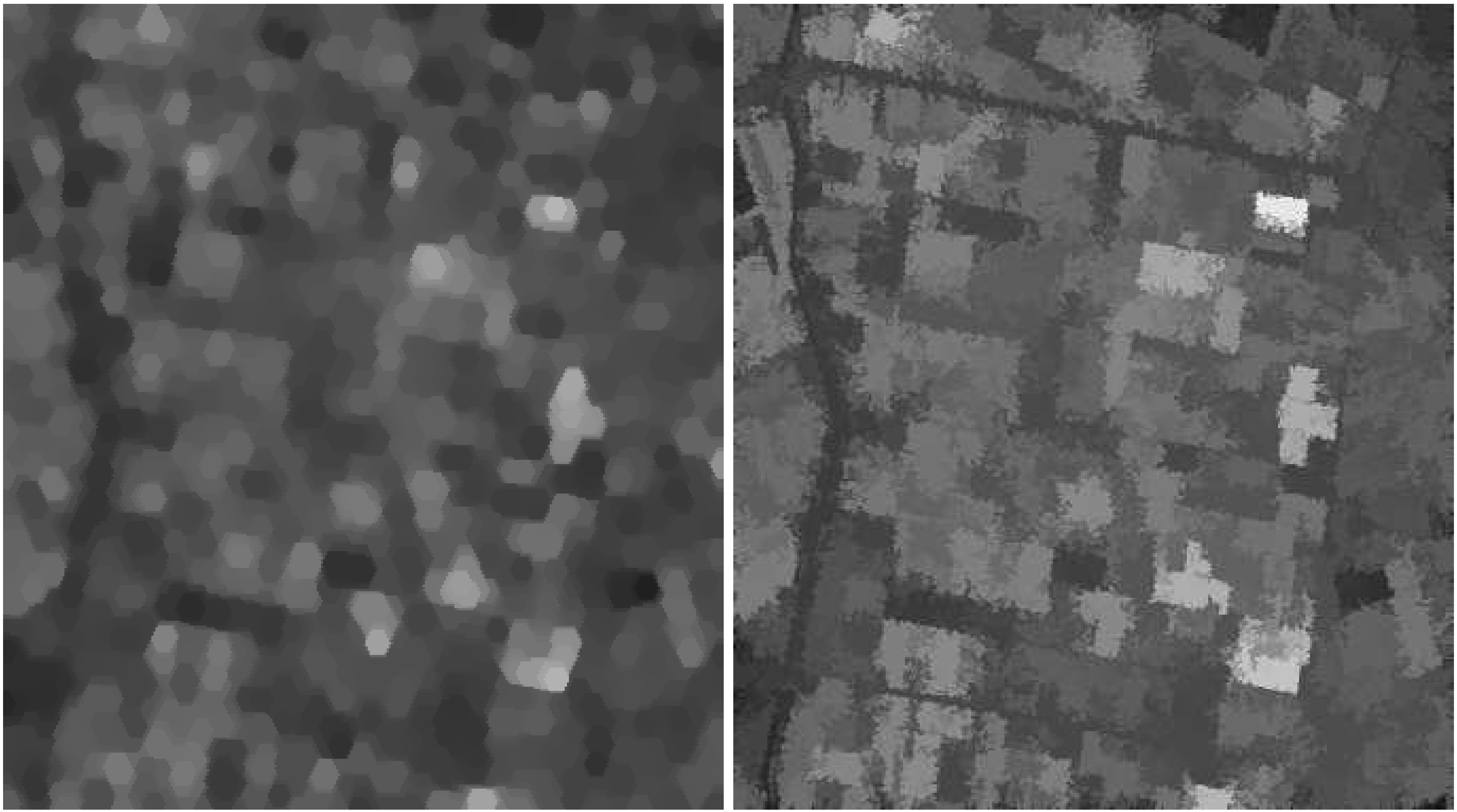
FAS par un hexagone (taille maximale = 1)

Un autre exemple



FAS par un hexagone (taille maximale = 3)

Un autre exemple

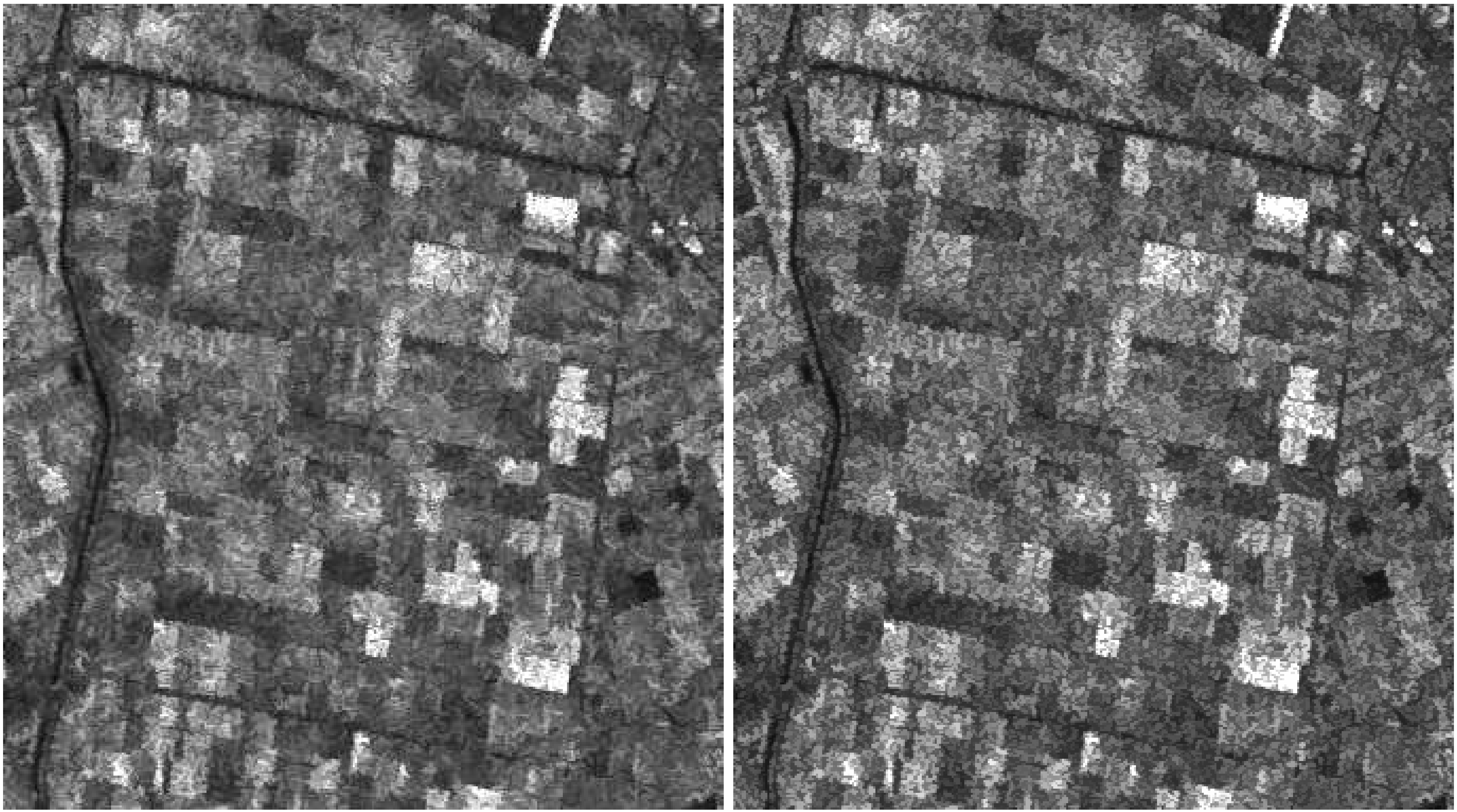


FAS par un hexagone (taille maximale = 5)

Un autre exemple

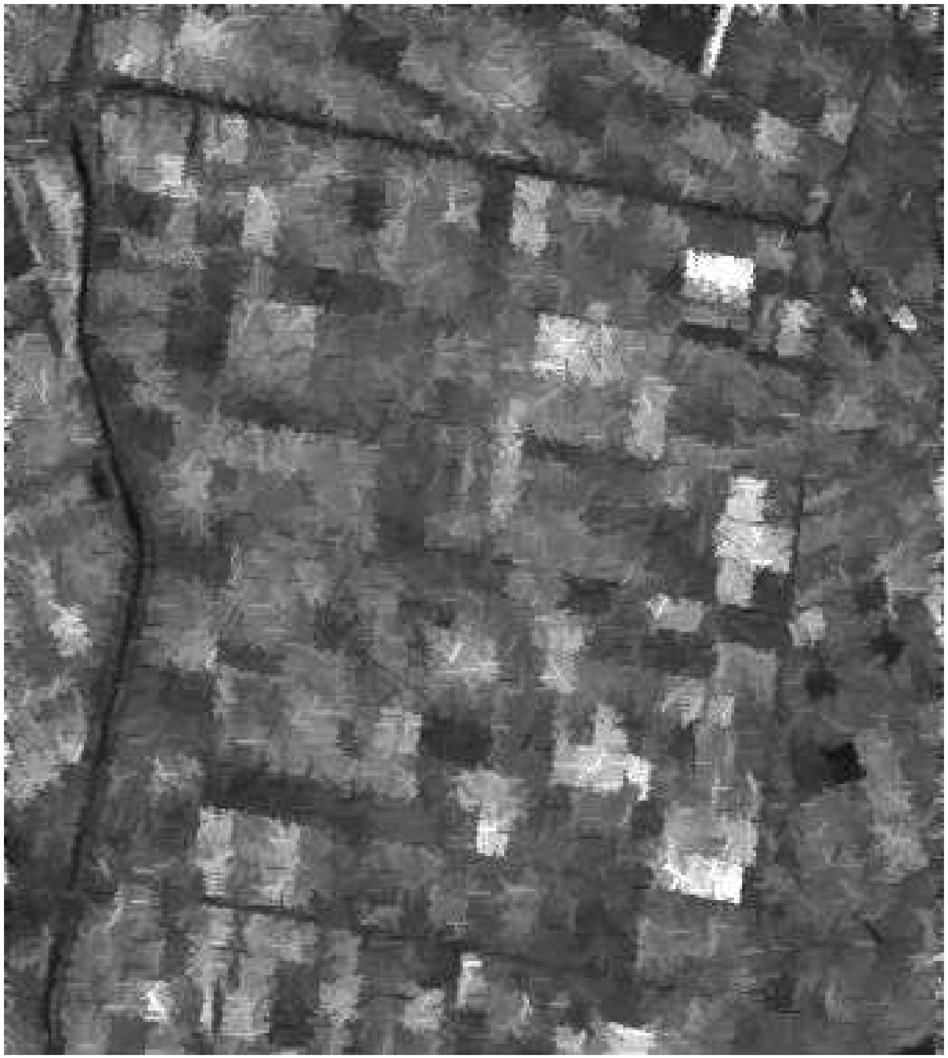
FAS par des segments (taille maximale = 1)

Un autre exemple



FAS par des segments (taille maximale = 3)

Un autre exemple




FAS par des segments (taille maximale = 5)

Maxima régionaux

X maximum régional de f si

$$\forall x \in X, f(x) = \lambda \text{ et } X = CC(f_\lambda)$$

Calcul des maxima régionaux :

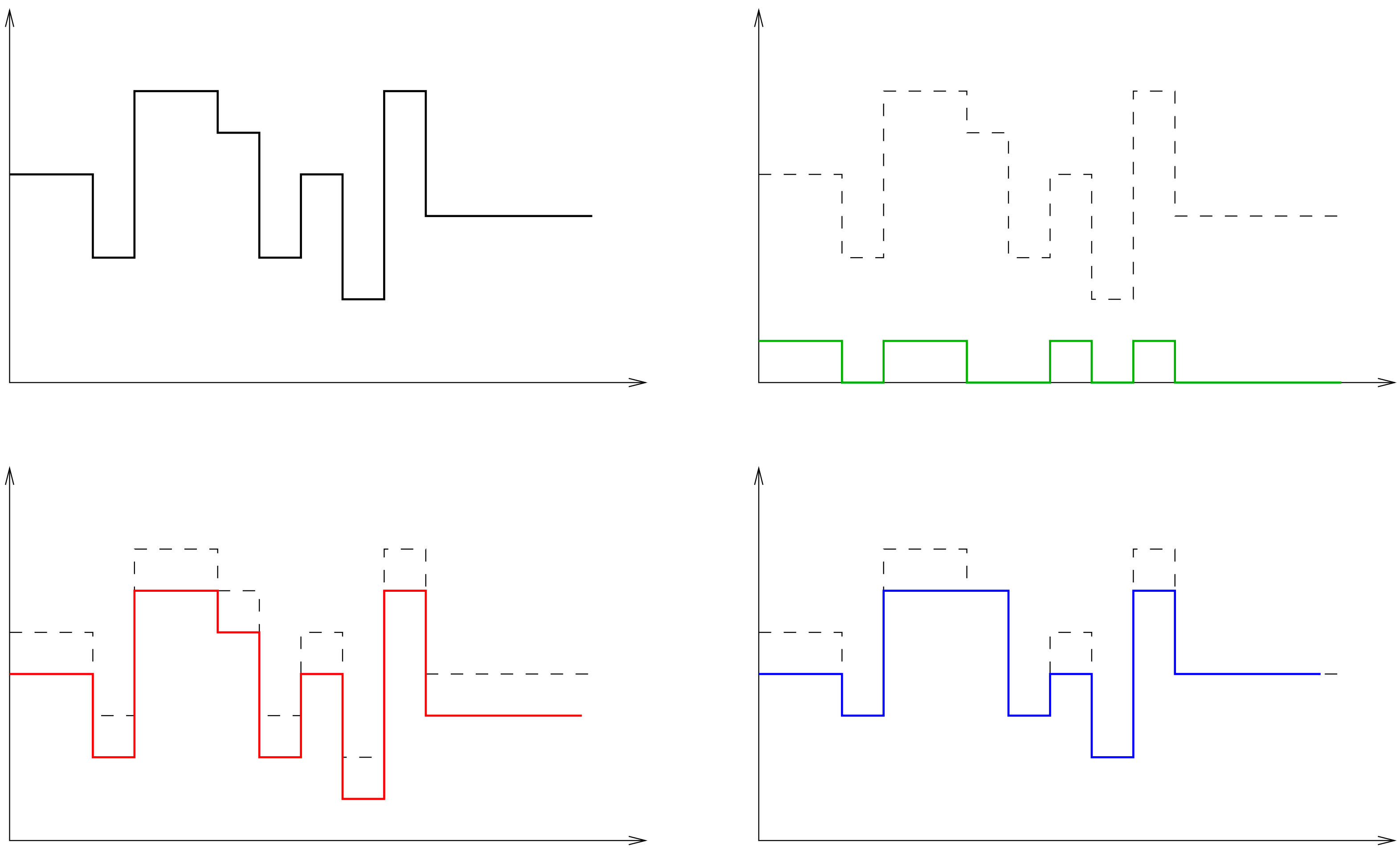
$$f - D_f^{\infty}(f - 1)$$

h-maxima (dynamique des niveaux de gris) :

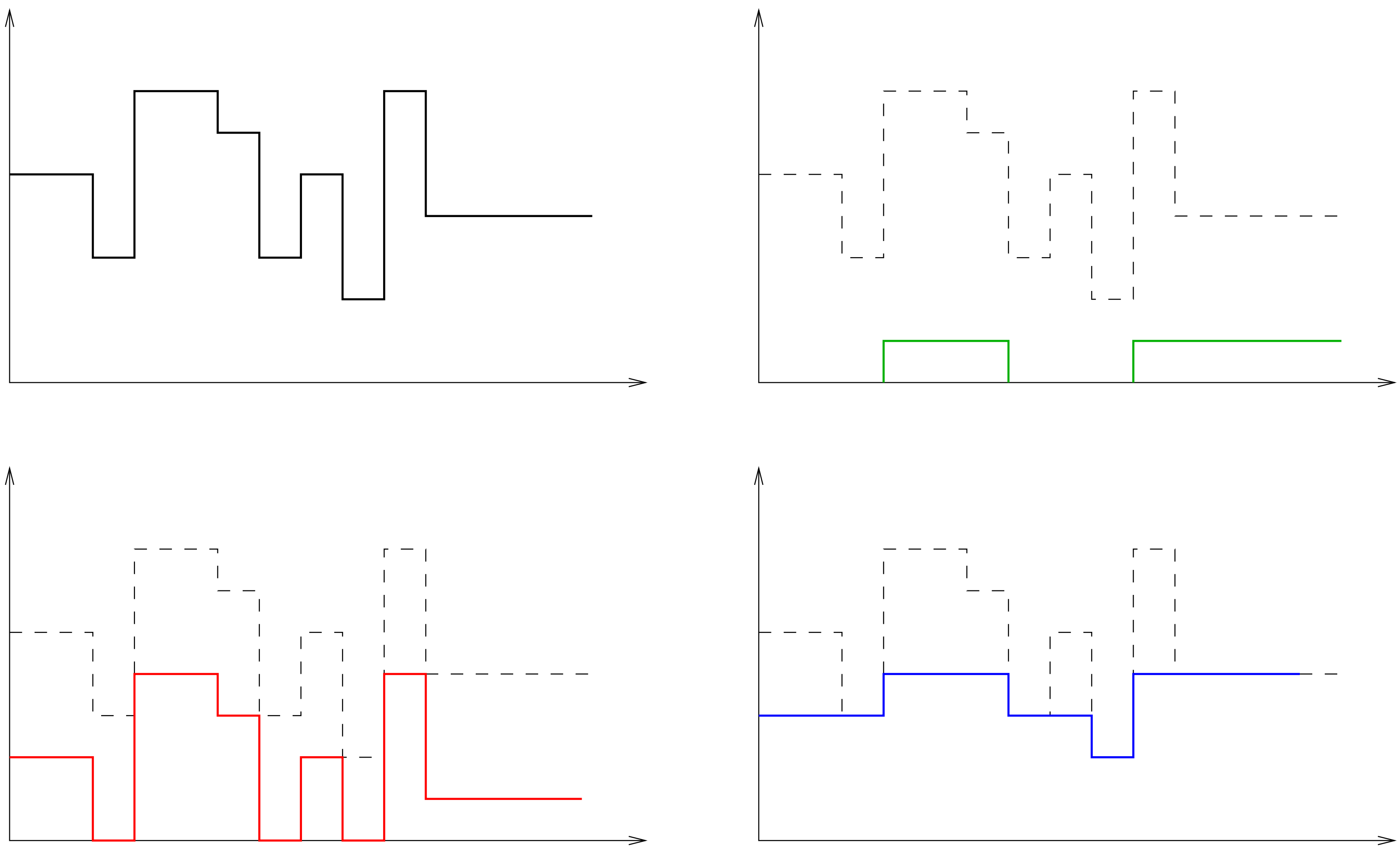
$$f - D_f^{\infty}(f - h)$$

$\Rightarrow$ maxima robustes

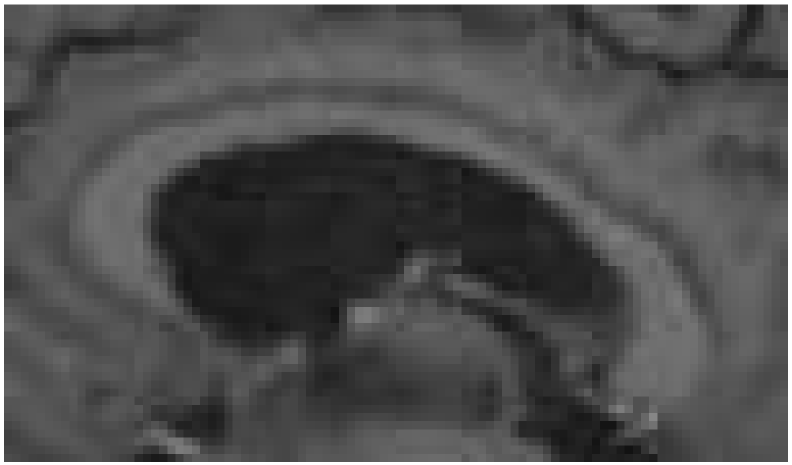
Maxima régionaux : exemple

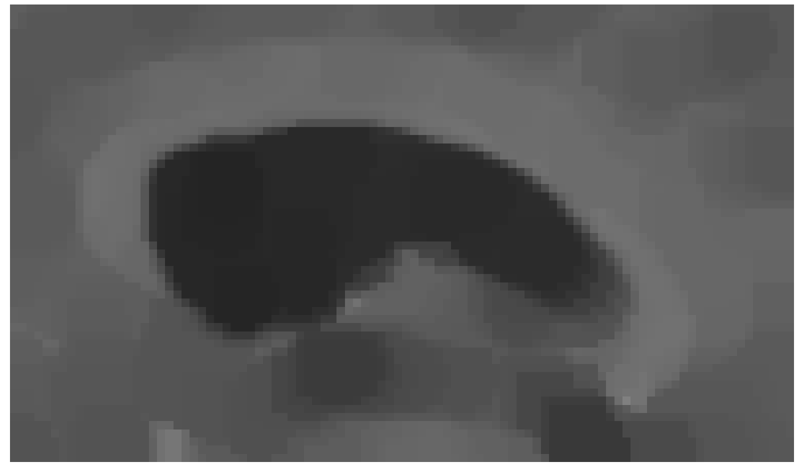


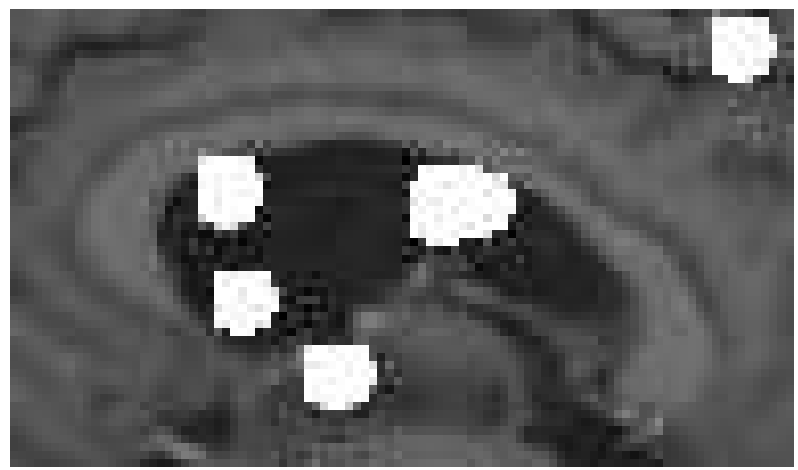
Maxima robustes : exemple



Minima régionaux : exemple







Squelette par zones d'influence

$X = \bigcup_i X_i$

Zone d'influence de X_i dans X^C :

$$ZI(X_i) = \{x \in X^C \mid d(x, X_i) < d(x, X \setminus X_i)\}$$

Squelette par zone d'influence :

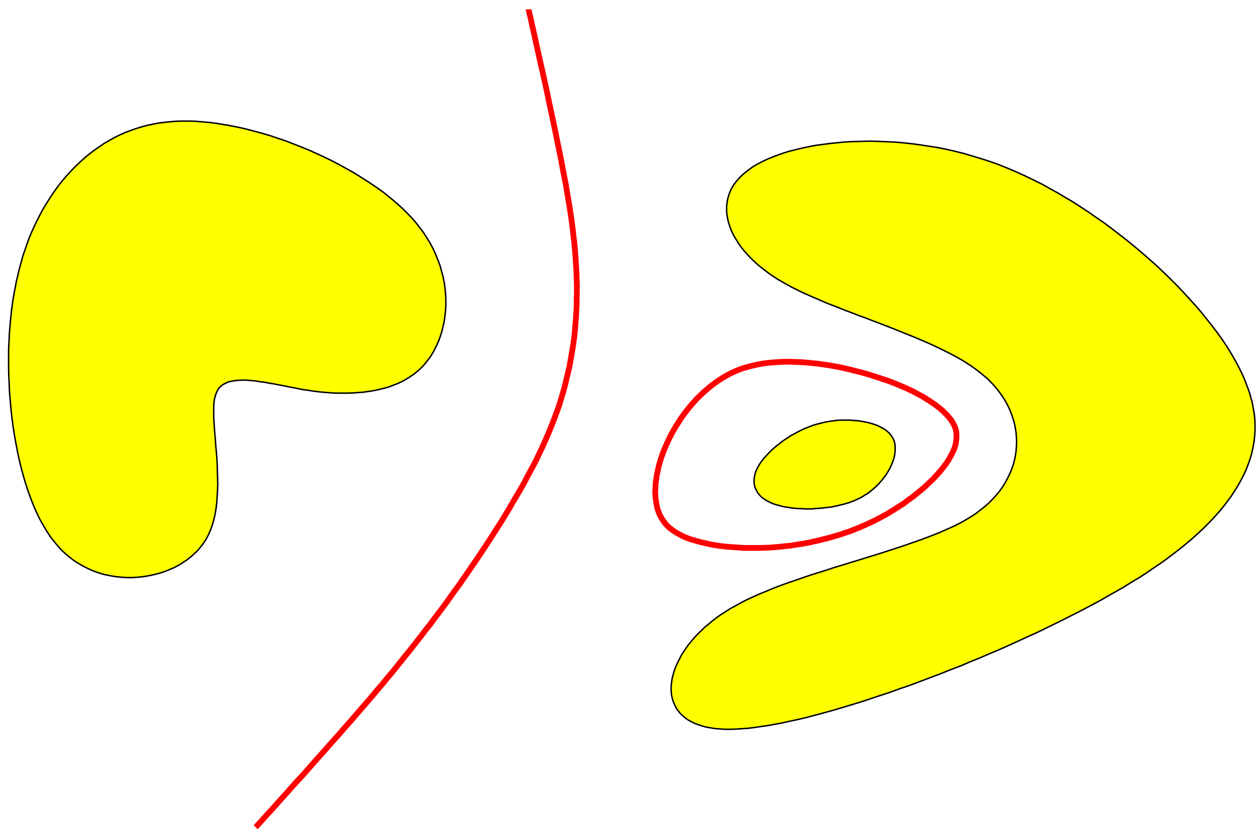
$$\text{Skiz}(X) = (\bigcup_i ZI(X_i))^C$$

= diagramme de Voronoï généralisé

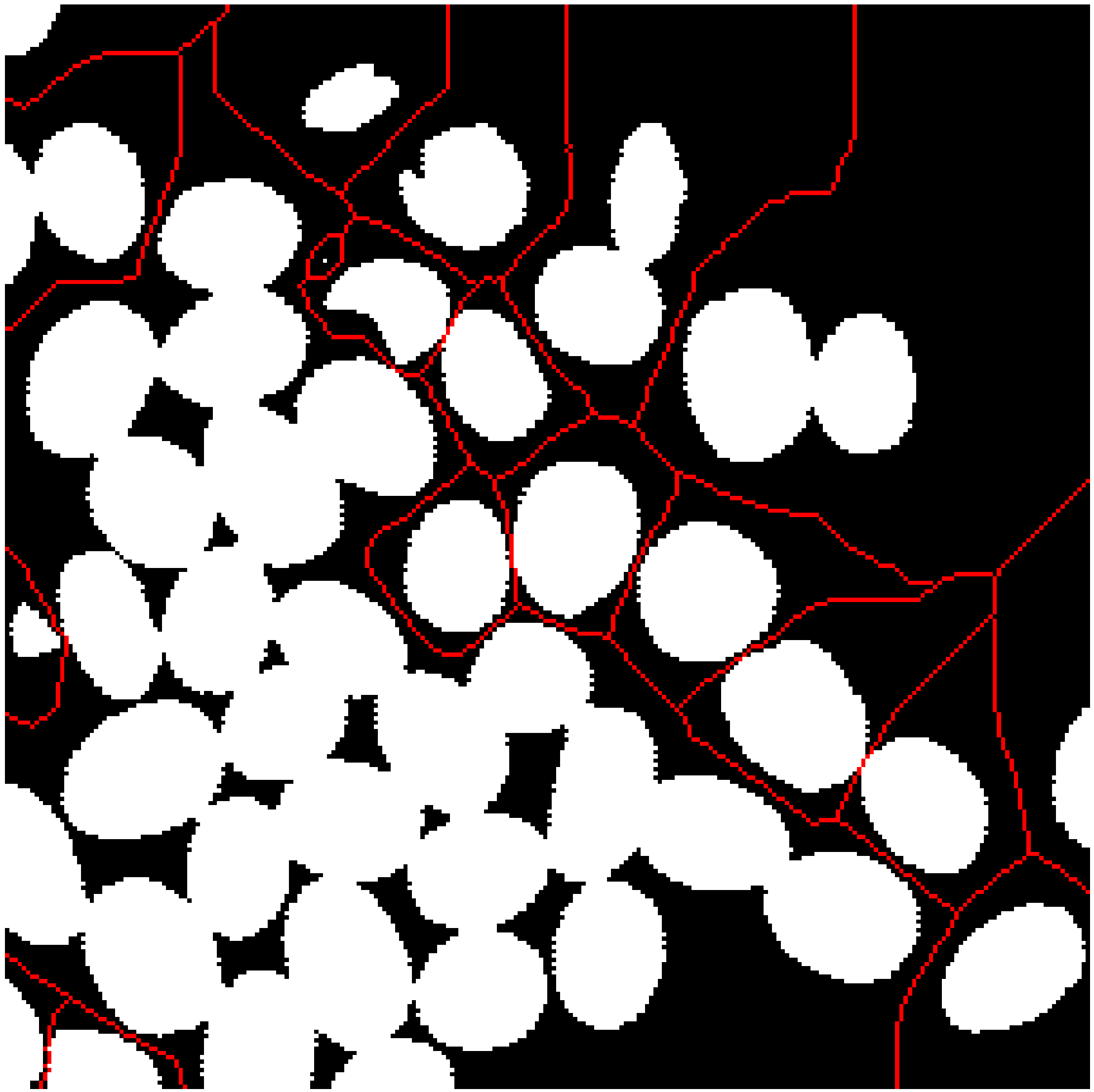
Propriétés :

- Skiz$(X) \subseteq squelette(X^C)$ (cf cours sur le squelette)
- le Skiz peut être non connexe (même si X^C l'est)

Squelette par zones d'influence : exemples



Squelette par zones d’influence : exemples



Squelette géodésique par zones d'influence

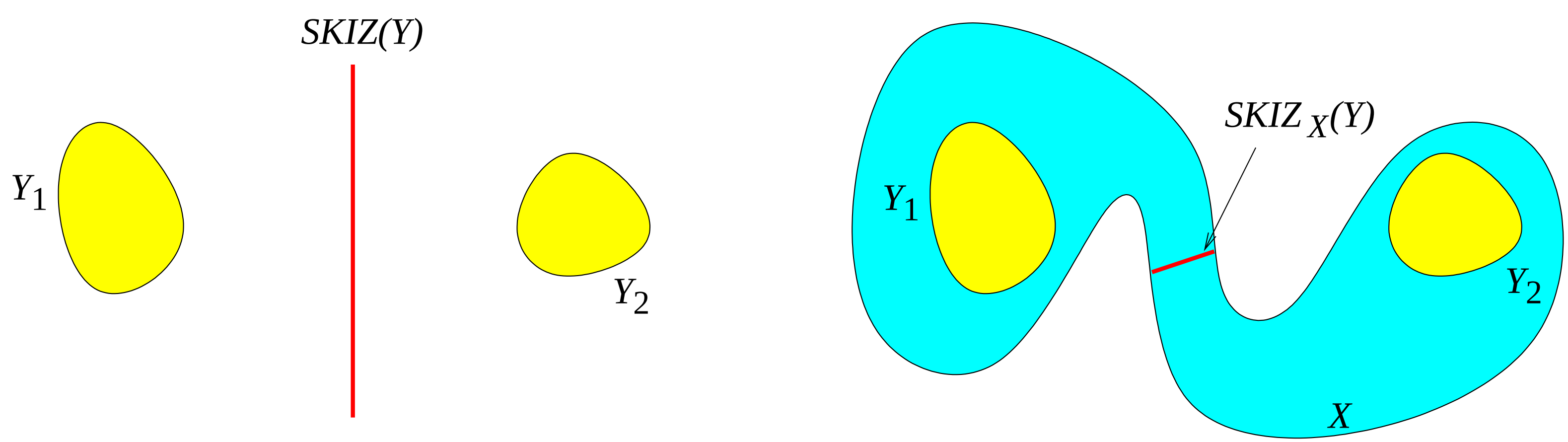
$Y = \cup_i Y_i$

Zone d'influence géodésique de Y_i conditionnellement à X :

$$ZI_X(Y_i) = \{x \in X \mid d_X(x, Y_i) < d_X(x, Y \setminus Y_i)\}$$

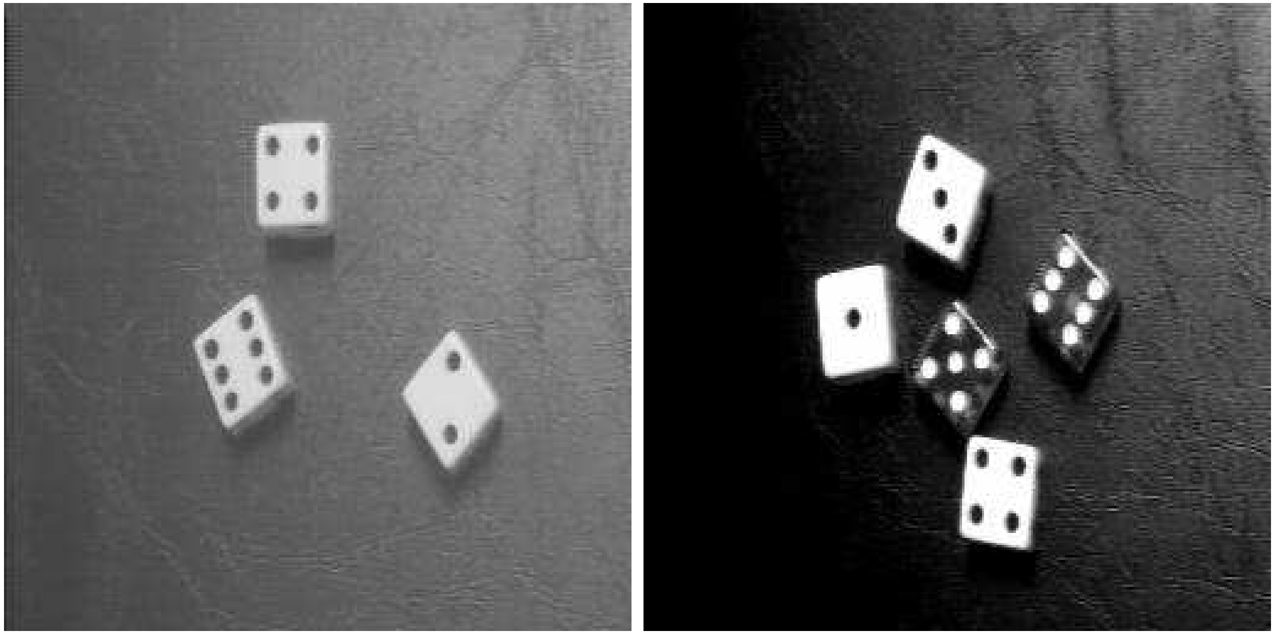
Squelette géodésique par zone d'influence :

$$SKIZ_X(Y) = X \setminus \bigcup_i ZI_X(Y_i)$$

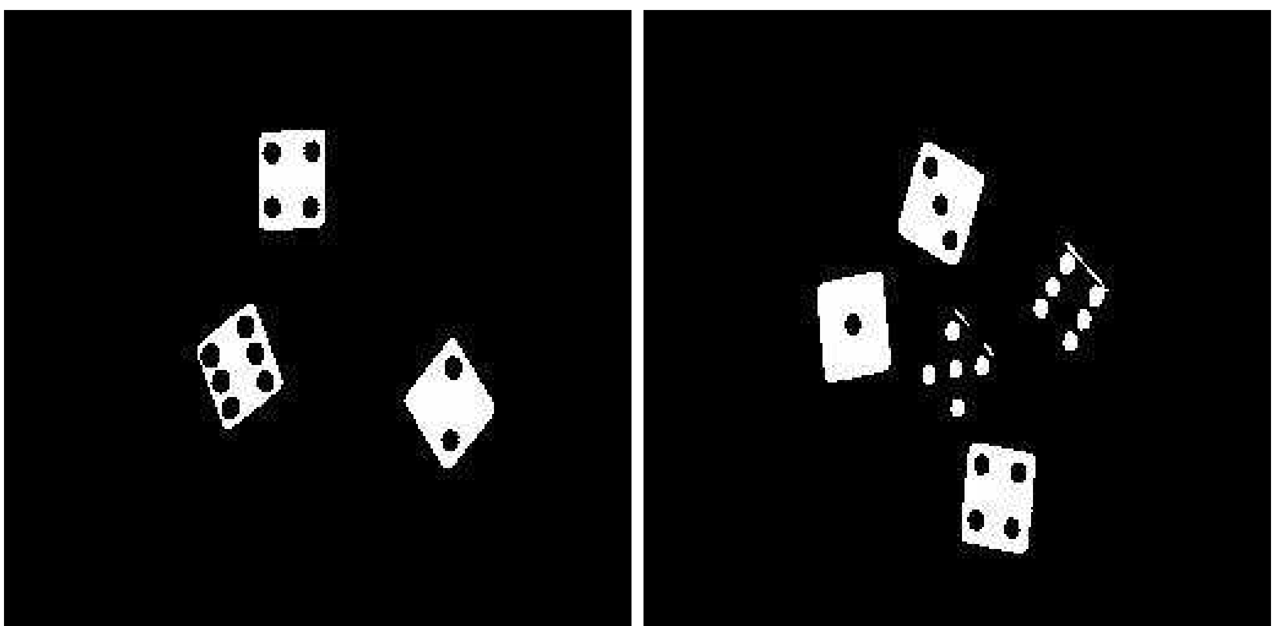


Une première application simple...

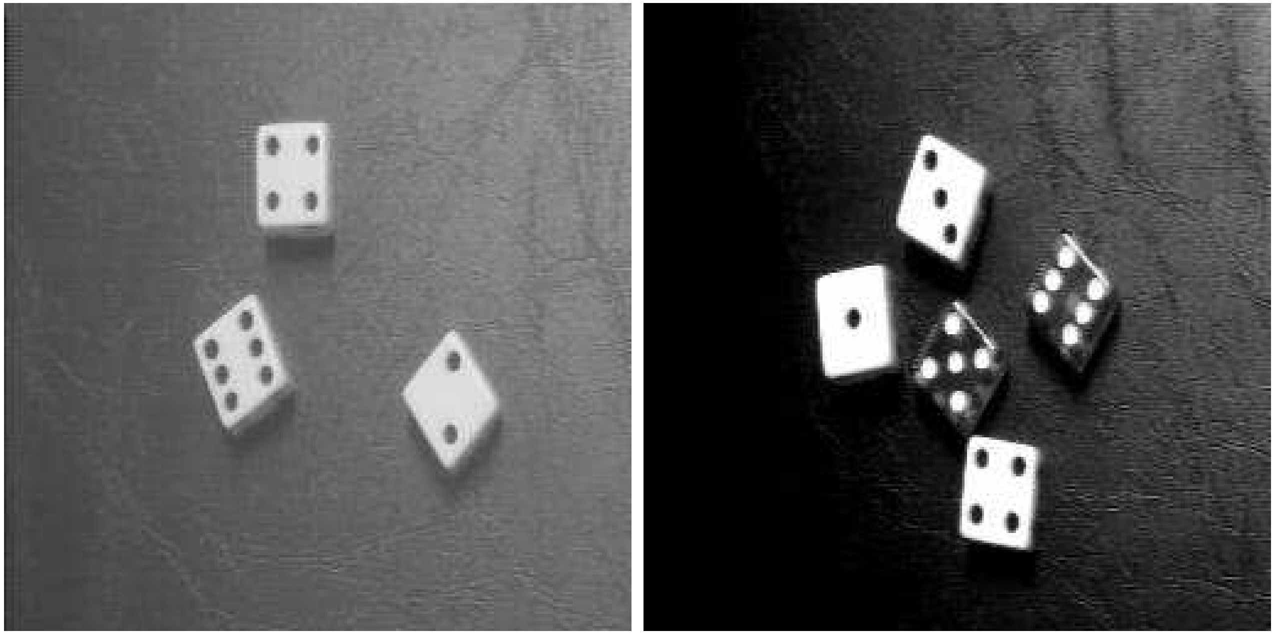
Une première application simple...



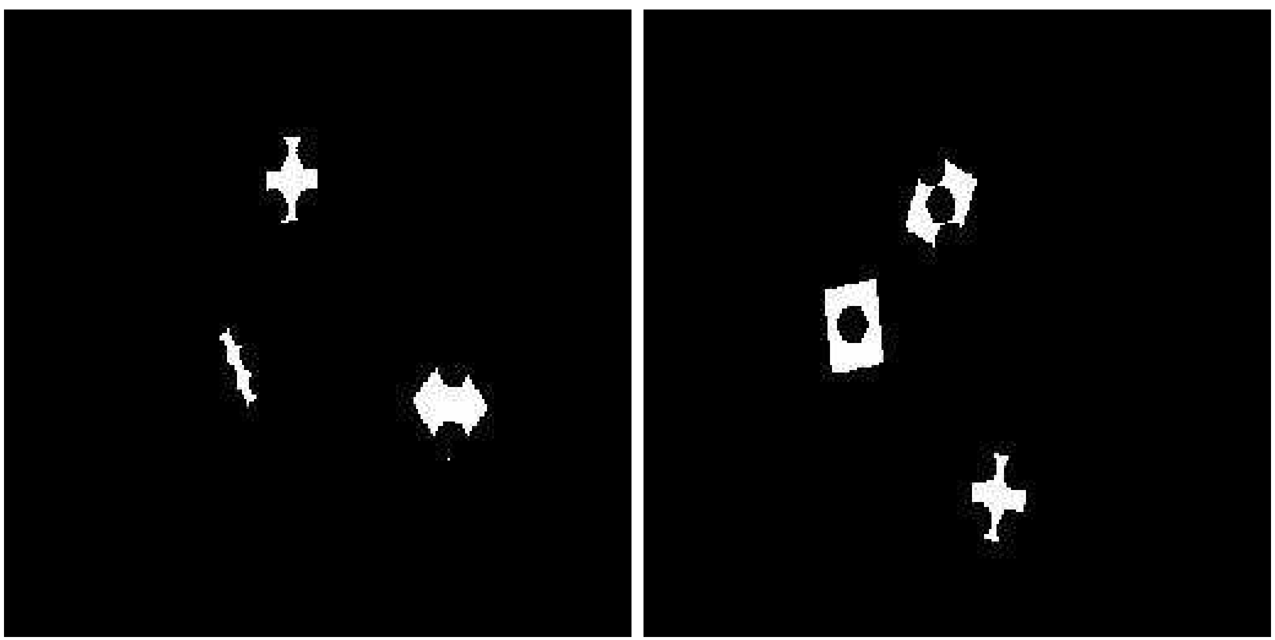
Seuillage :



Une première application simple...

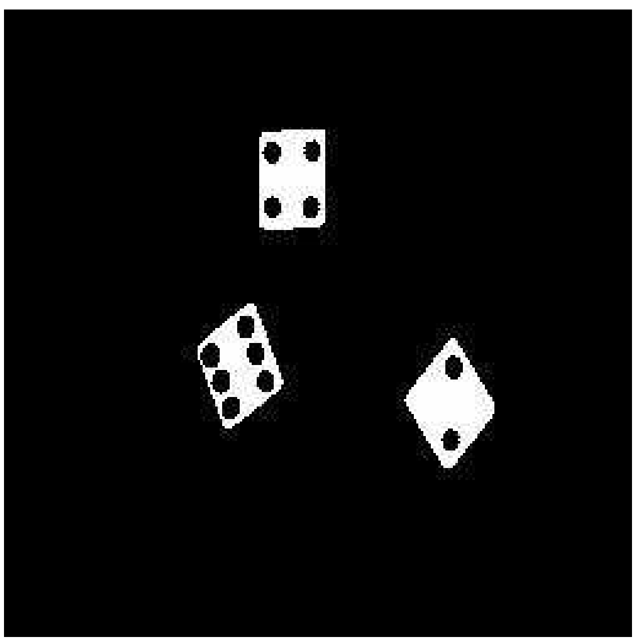
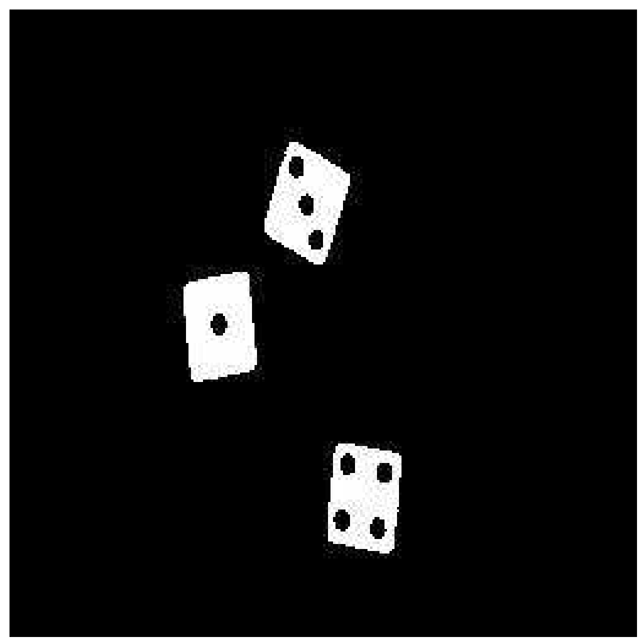


Erosion :



Une première application simple...

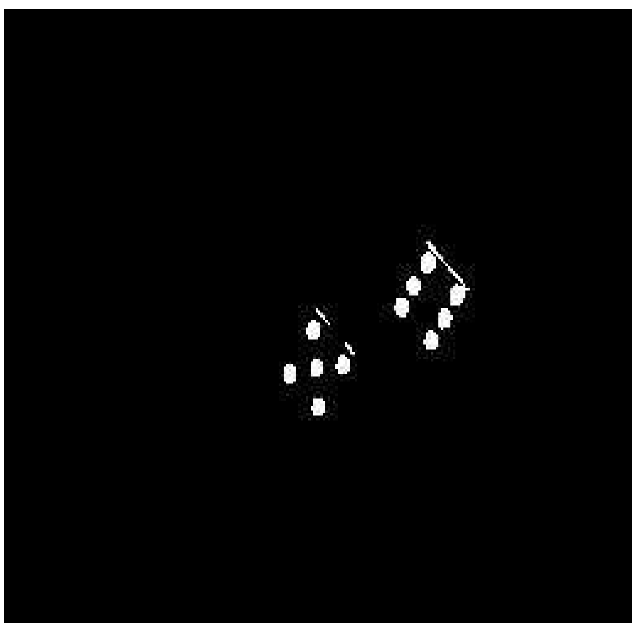

Reconstruction :

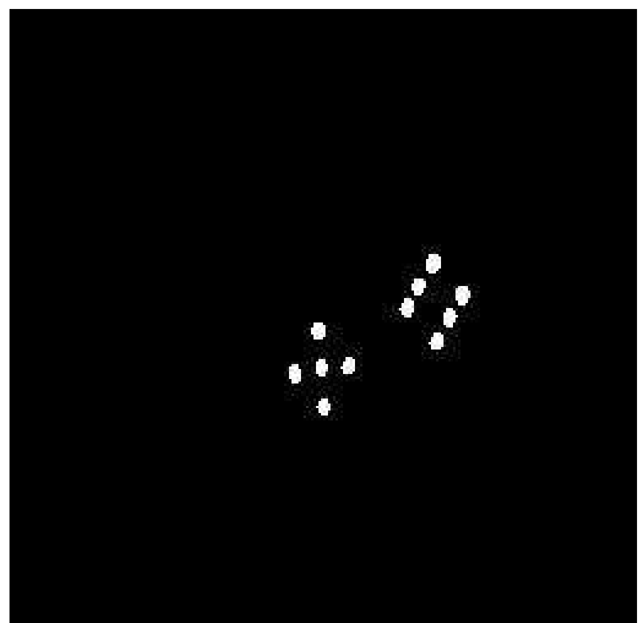



⇒ comptage des dés blancs et des points noirs sur chaque dé

Une première application simple...

Image seuillée – reconstruction des dés blancs puis petite ouverture

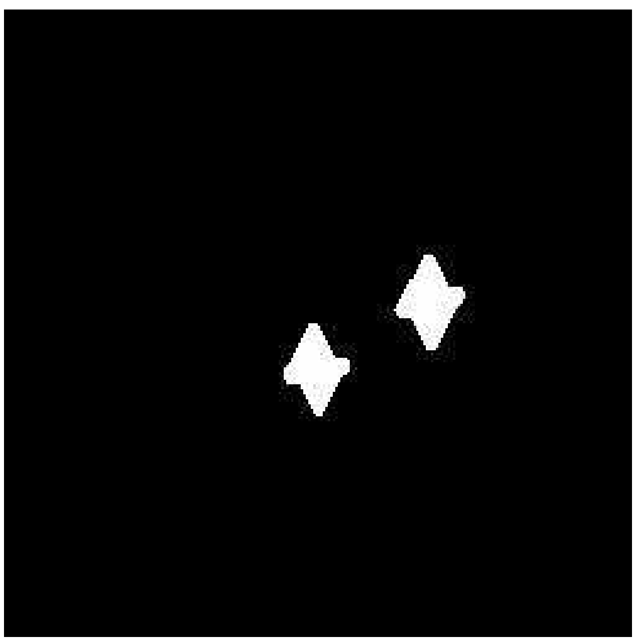
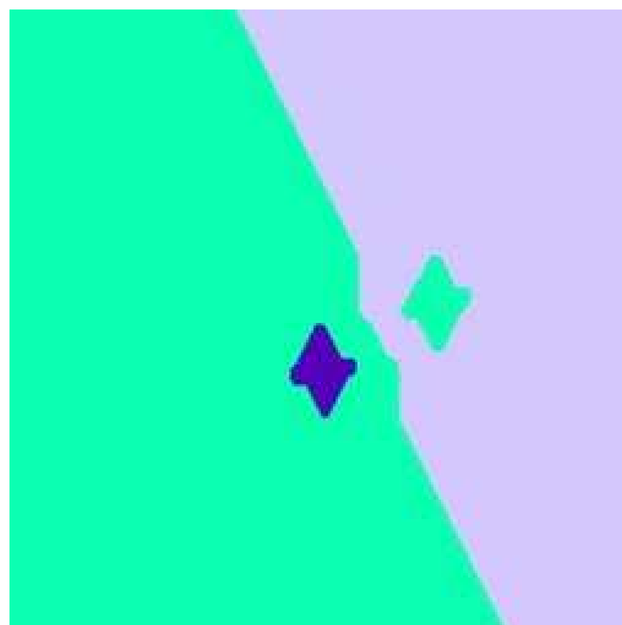




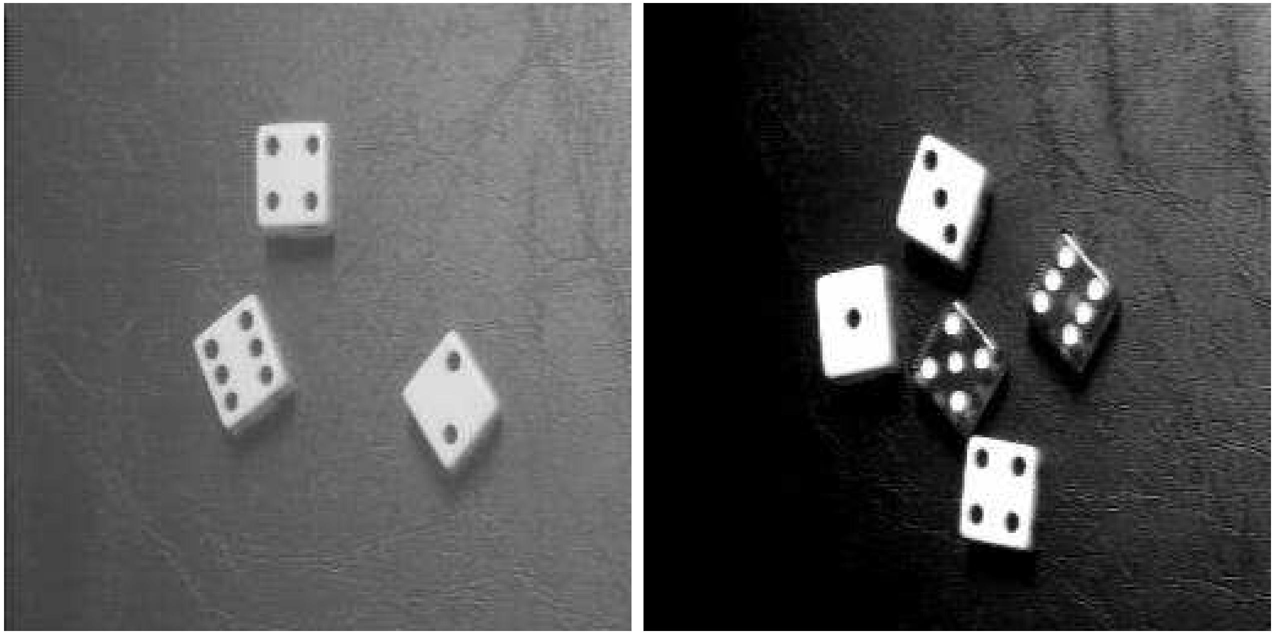
Une première application simple...

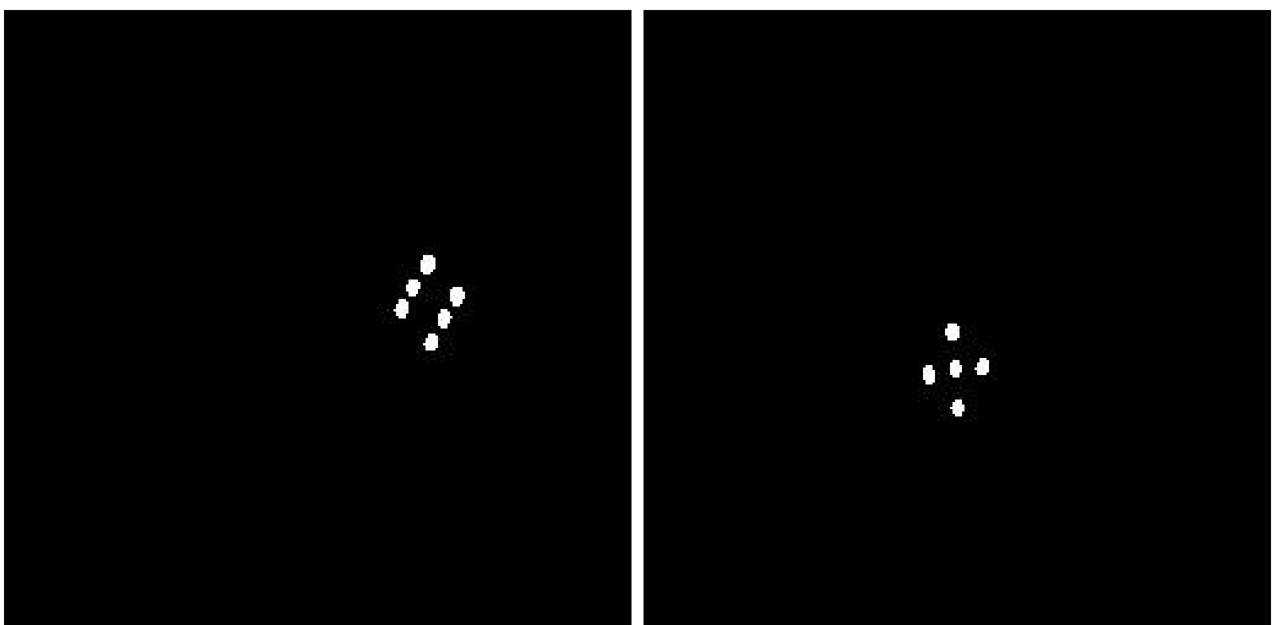
Grande fermeture (15) - SKIZ

Une première application simple...

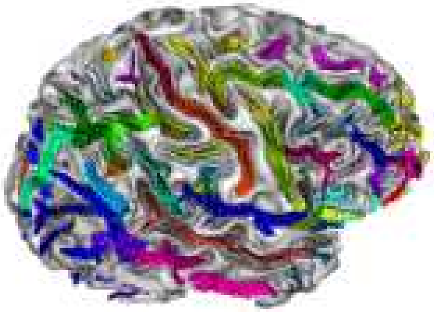


Séparation (et logique) et étiquetage



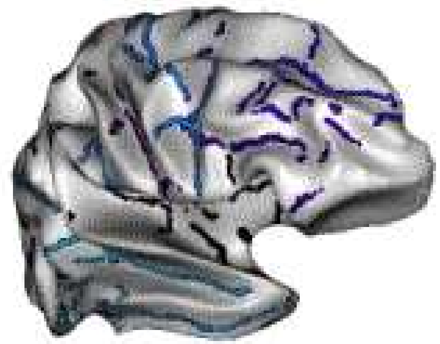
⇒ comptage des dés noirs et des points blancs sur chaque dé

Parcellisation du cortex (thèse d'Arnaud Cachia)



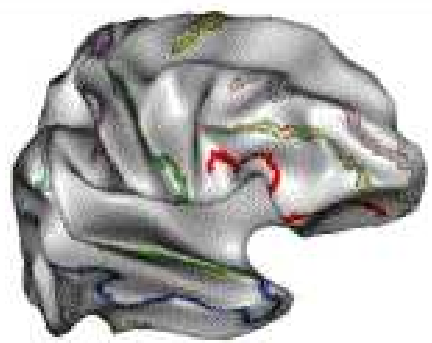
Segmentation et reconnaissance automatique des **sillons**

Rivière00

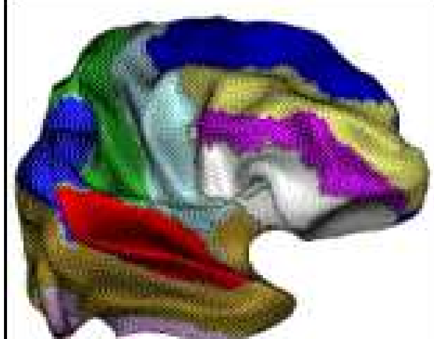


Définition sur la surface corticale des **sillons-frontières**

Calcul des **zones d'influences sulcales**

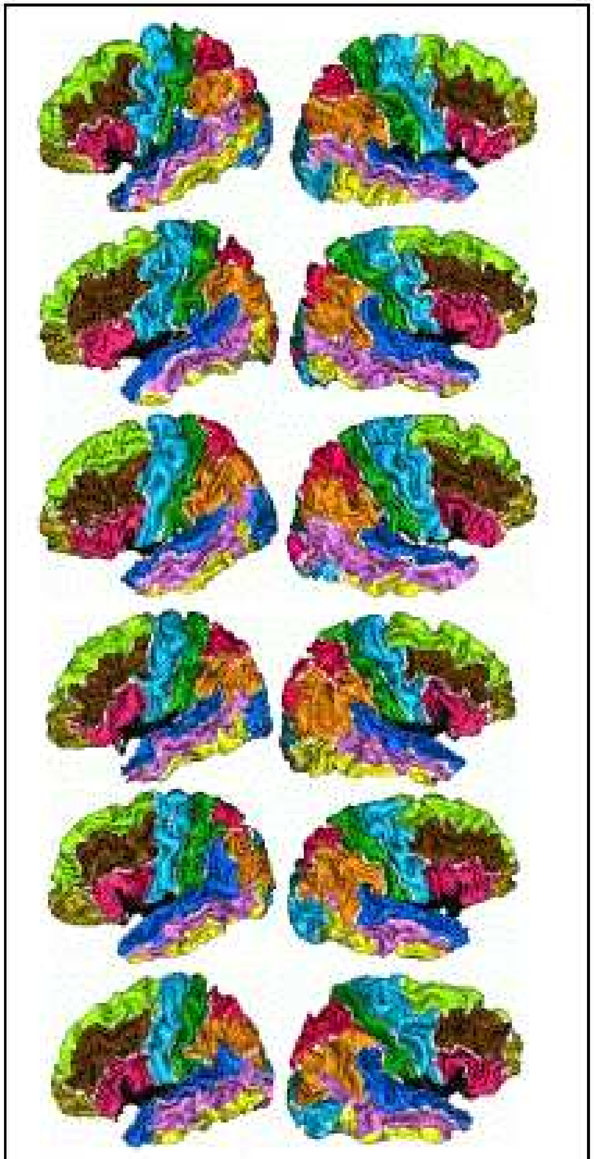


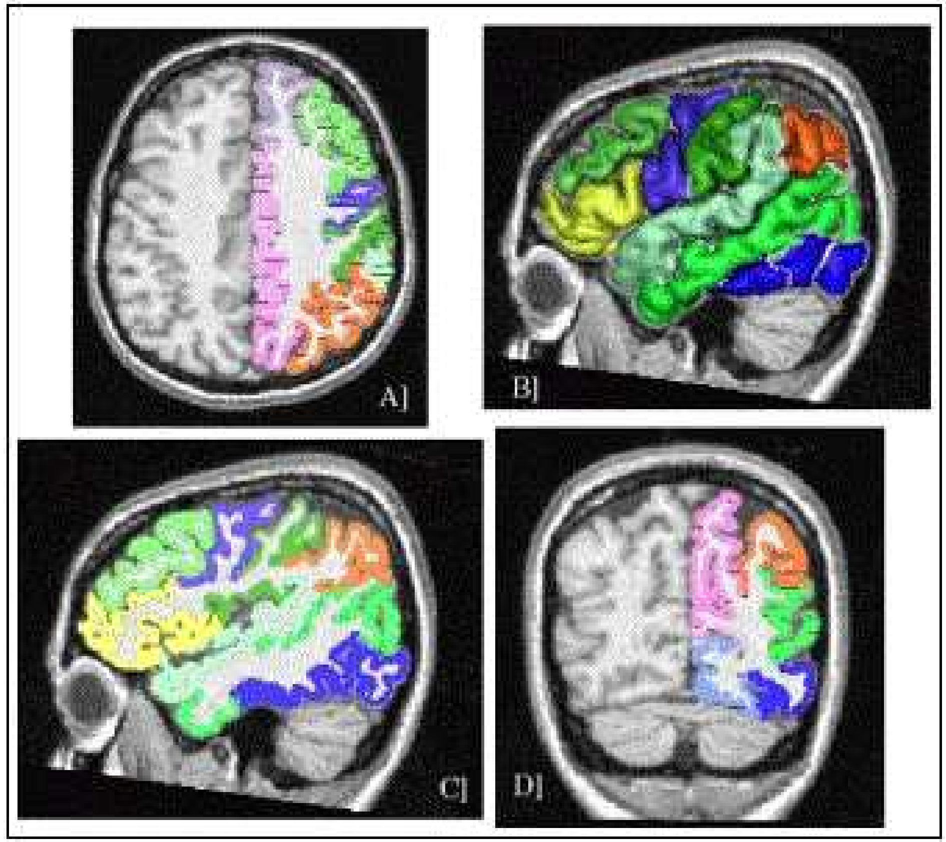
Définition des **graines gyrales** (extraction et sélection des frontières)



Parcellisation en **gyri** (2D et 3D)

Parcellisation du cortex (thèse d'Arnaud Cachia)





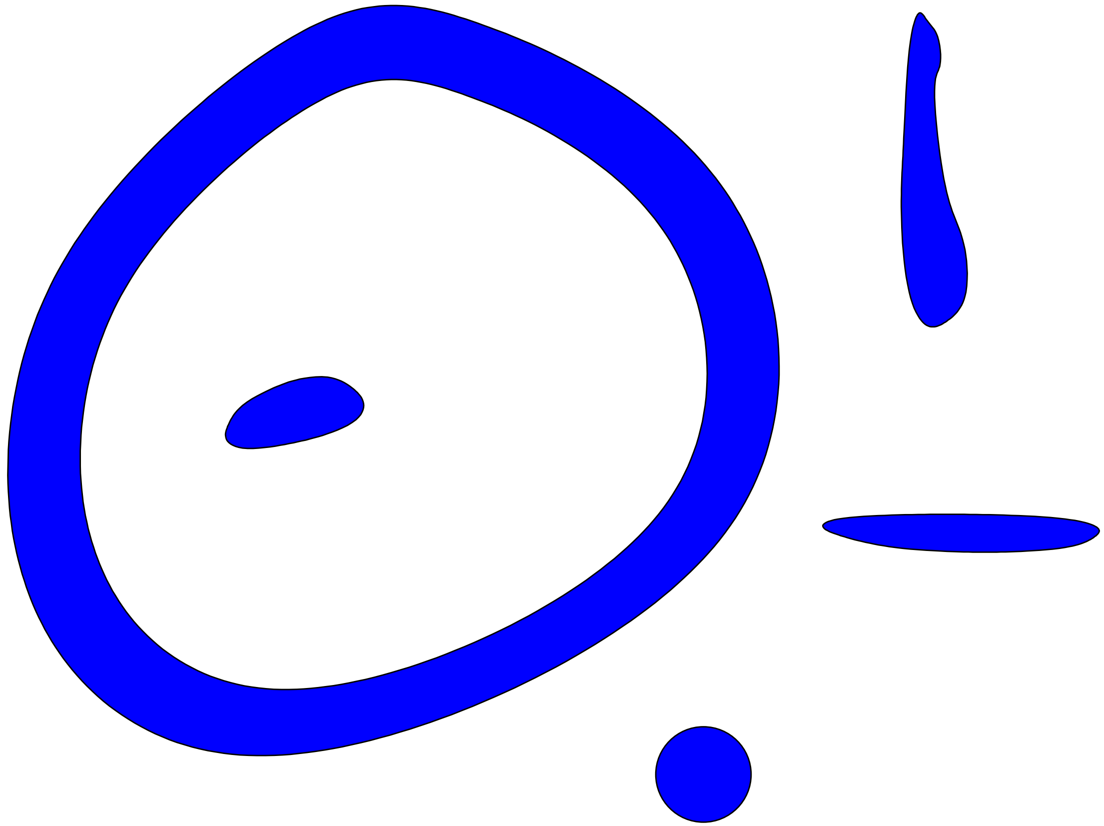
Parcellisation volumique
(diagramme de Voronoï calculé
dans le ruban cortical 3D)

Filtres connectés

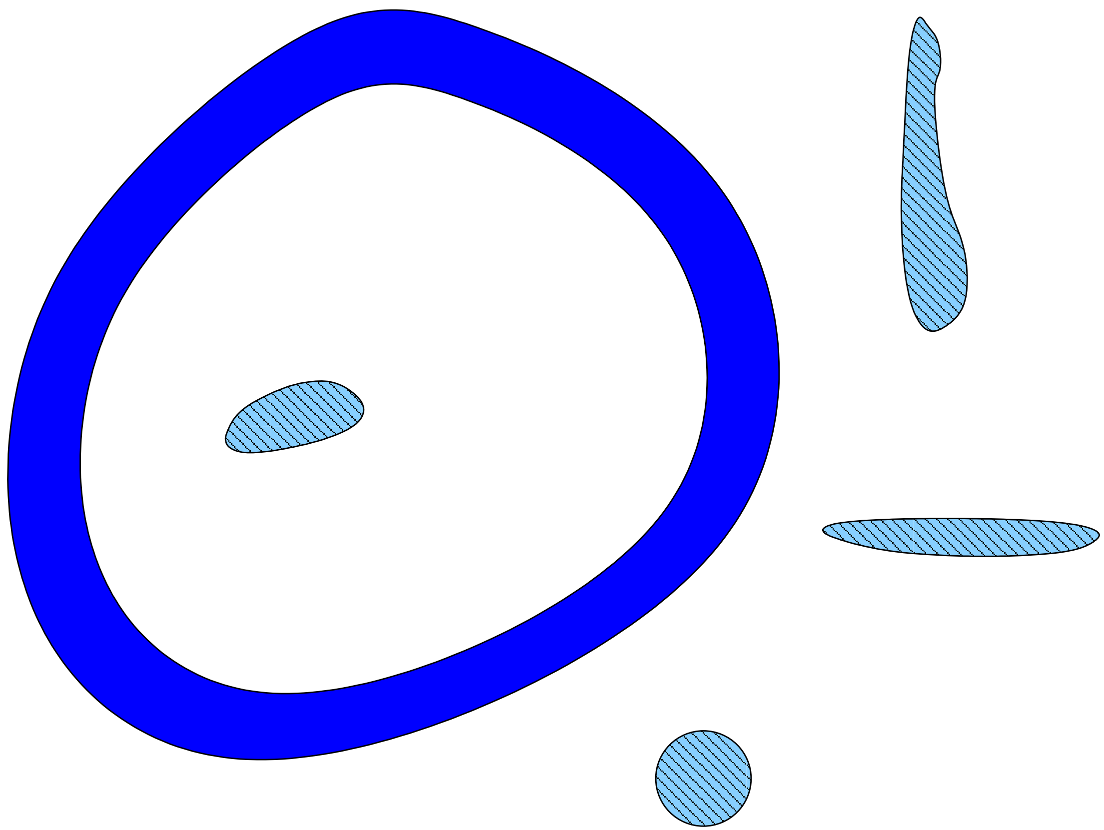
- Objectif : simplifier l'image
- Filtre morphologique qui
  - préserve les contours
  - est indépendant du contraste
  - agit sur les composantes connexes
- Premier exemple : ouvertures surfaciques

$$\gamma_\lambda(f) = \bigvee_i \{\gamma_{B_i}(f) \mid B_i \text{ connexe et } S(B_i) = \lambda\}$$

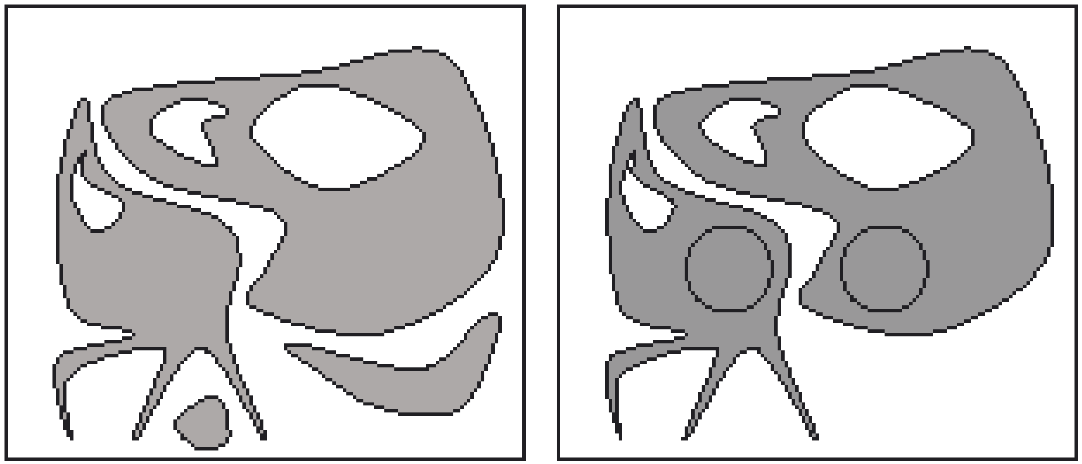
Filtres connectés



Filtres connectés



Filtres connectés



Original Image

Opening by reconstruction

Original Image

Opening by reconstruction

Area Opening

Filtres connectés sur des images à niveaux de gris

- Opérations croissantes
- Application coupe par coupe

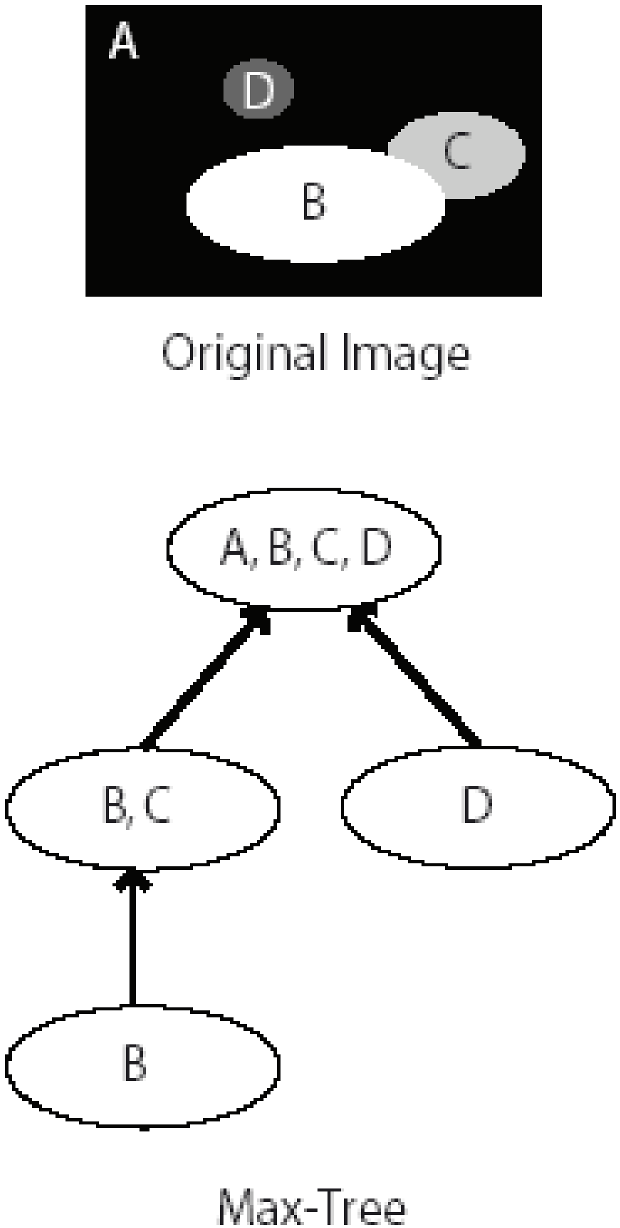
$$T_h(f) = \{x \mid f(x) \geq h\}$$

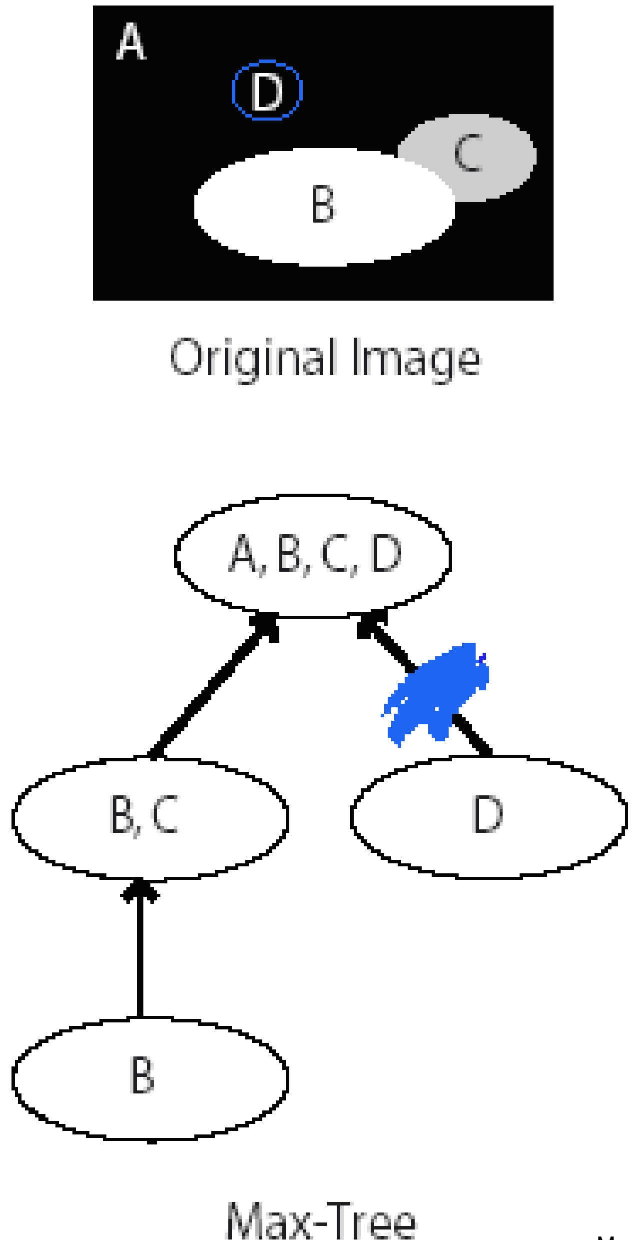
$$(\gamma^A(f))(x) = \sup\{h \mid x \in \Gamma^A(T_h(f))\}$$

Ouverture surfacique

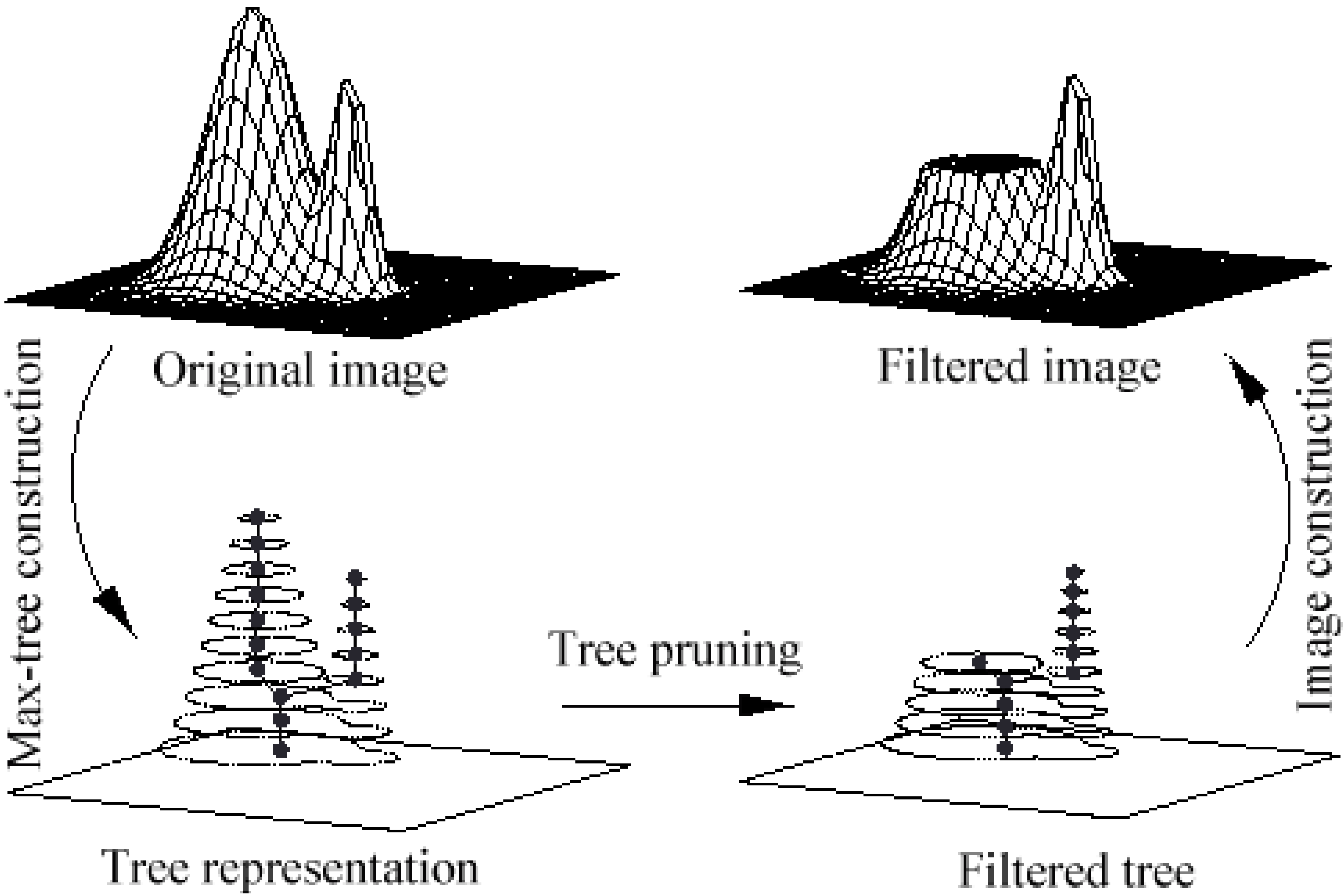
Fermeture surfacique

Représentation par arbres





Représentation par arbres



from (Salembier ITIP 00)

Ouverture par attribut

Original Image

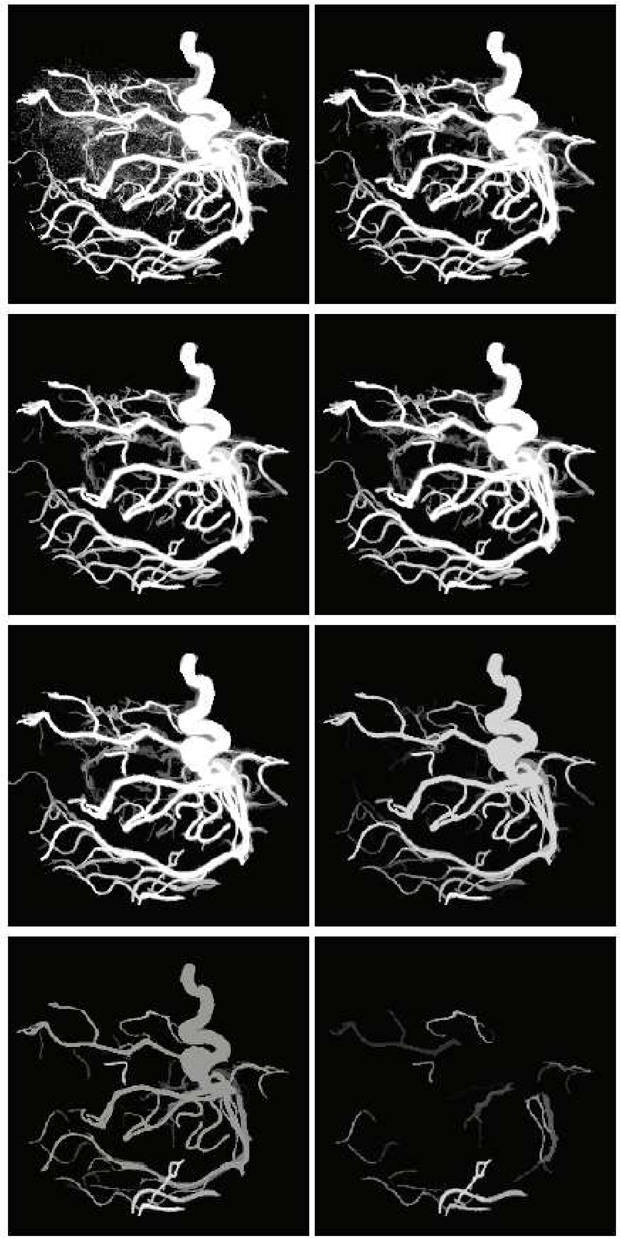
Area Opening

Moment of Inertia Opening

from (Wilkinson ISMM 00)

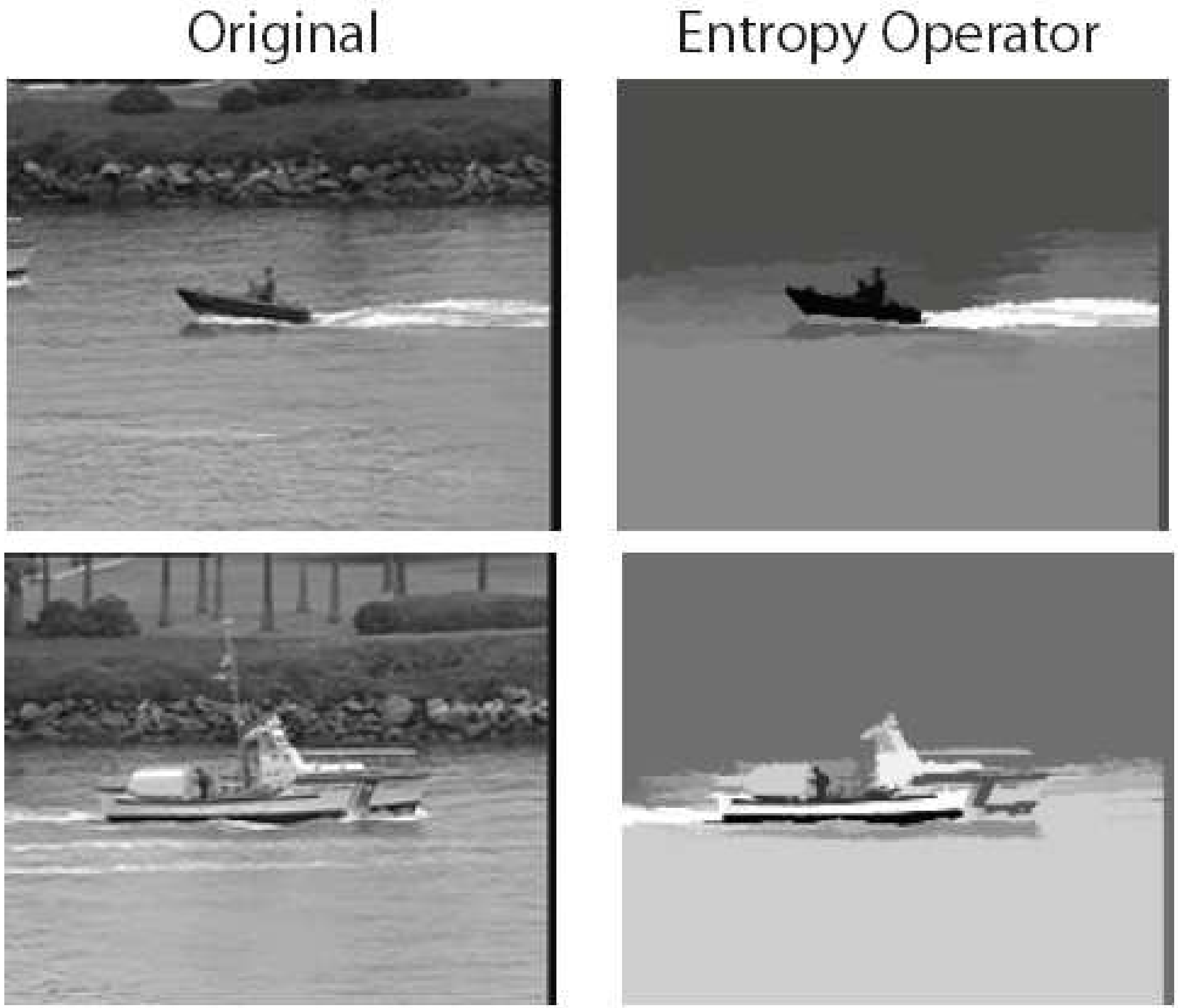
Exemples d’application

Filtrage en fonction de l’élongation (Meijster, 2002) :



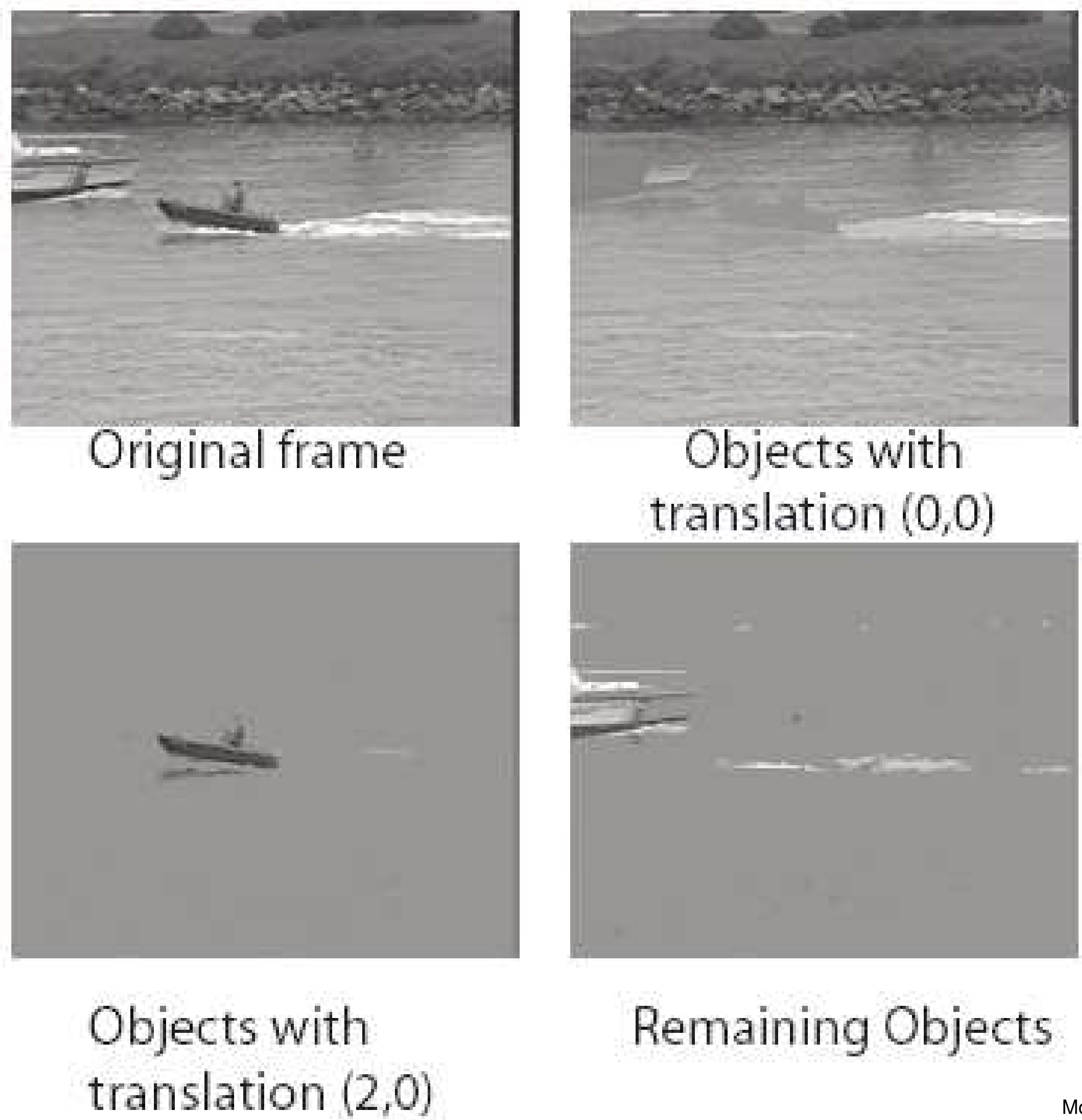
Exemples d'application

Critère entropique (Salembier, 1998) :



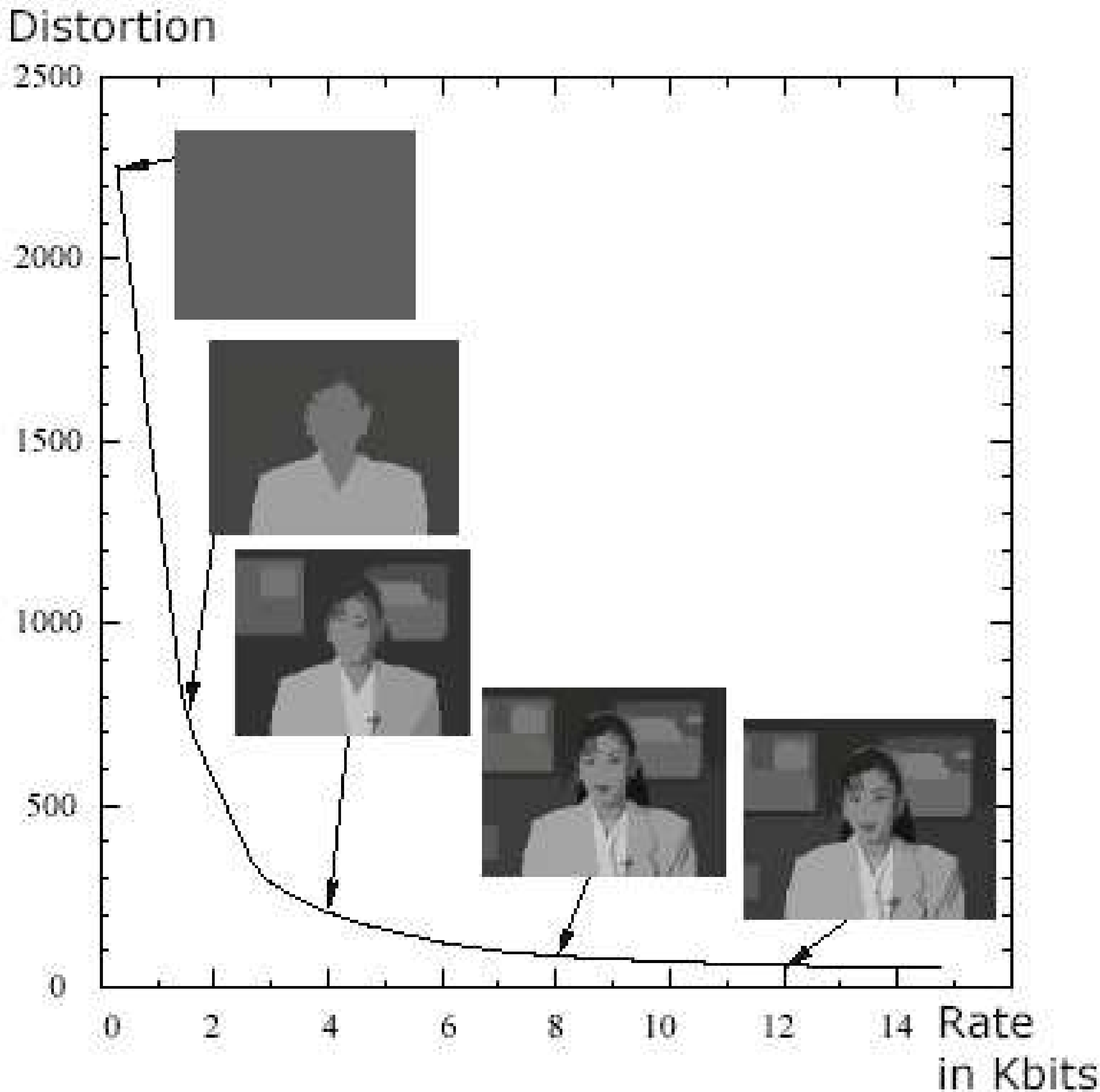
Exemples d'application

Analyse du mouvement (Salembier, 1998) :



Exemples d'application

Compression (Salembier, 2000) :



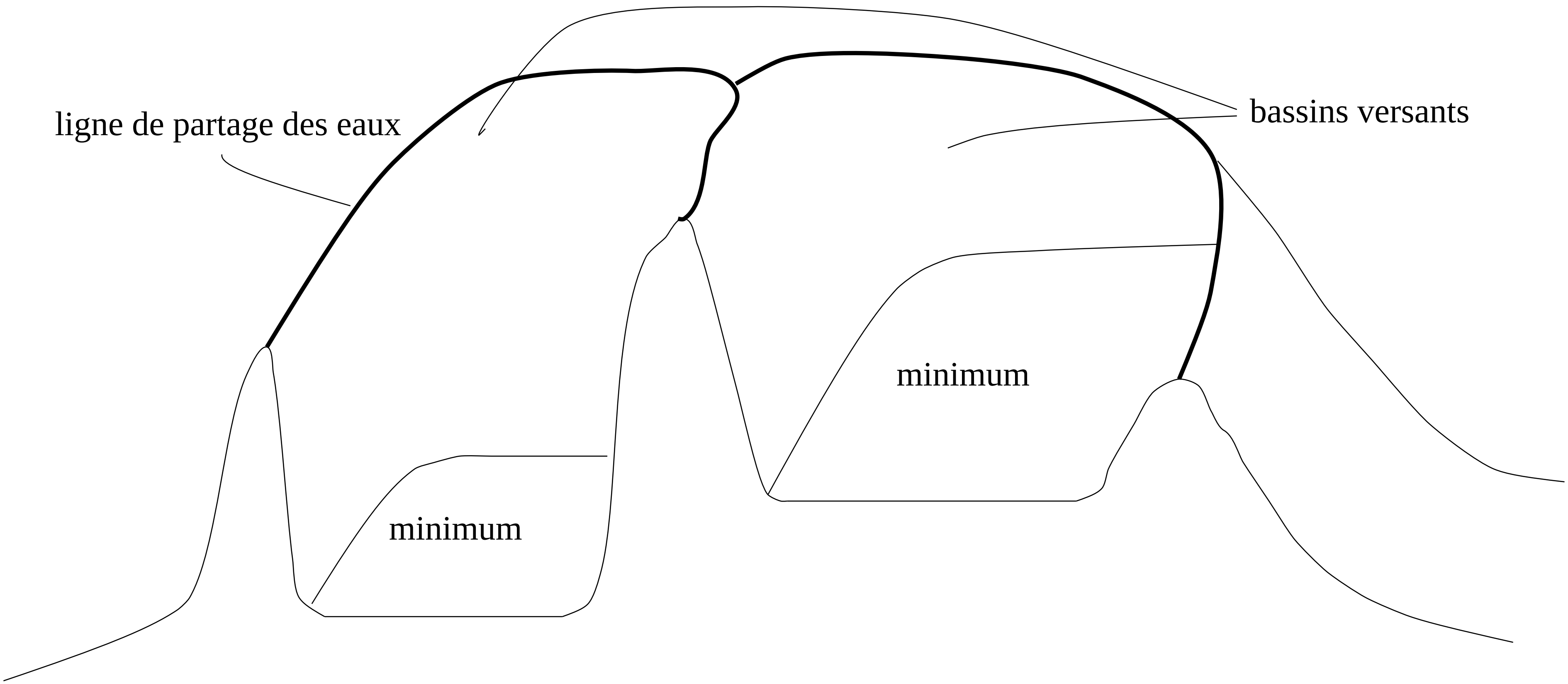
Segmentation morphologique

- Critères pour la segmentation d'images :
  - simplicité
  - régularité
  - fidélité

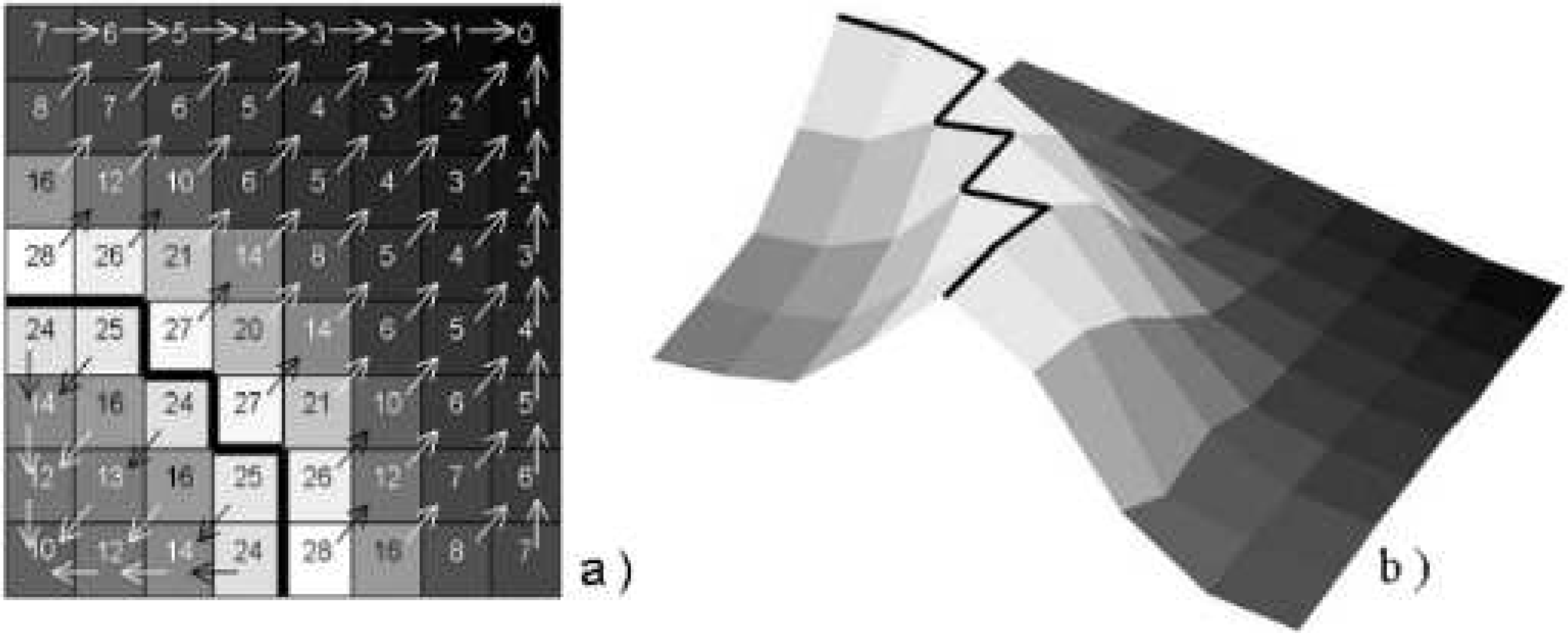
- Paradigmes morphologiques :
  - zones plates
  - bassins versants et ligne de partage des eaux

Ligne de partage des eaux (LPE)

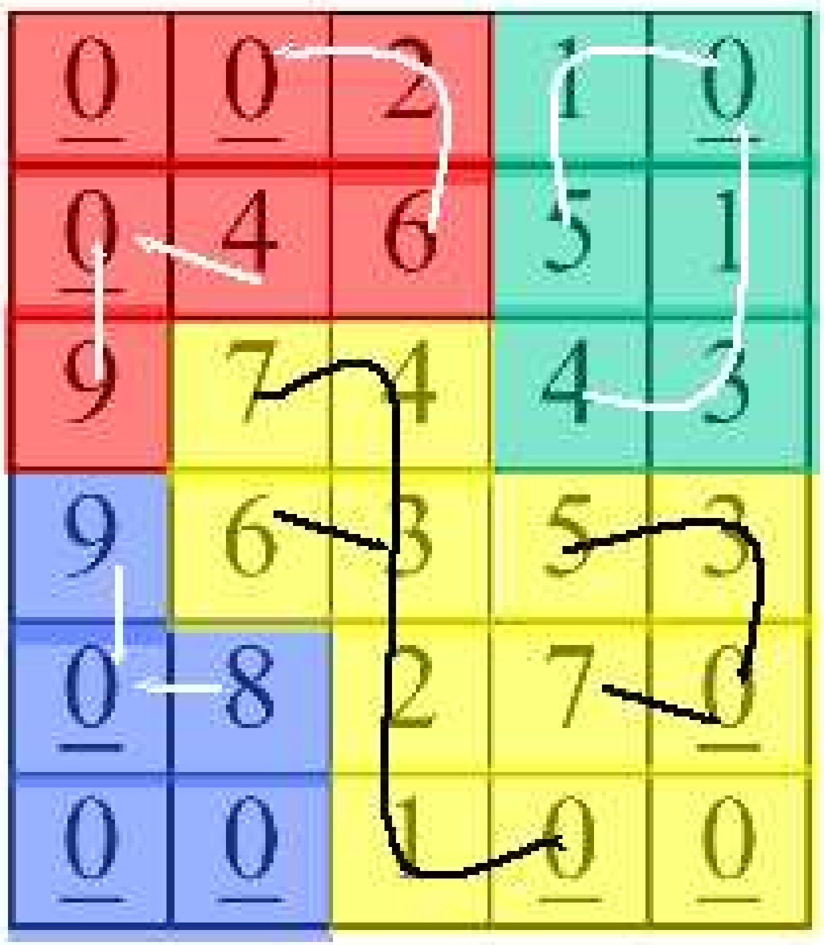
Ligne de partage des eaux (LPE)

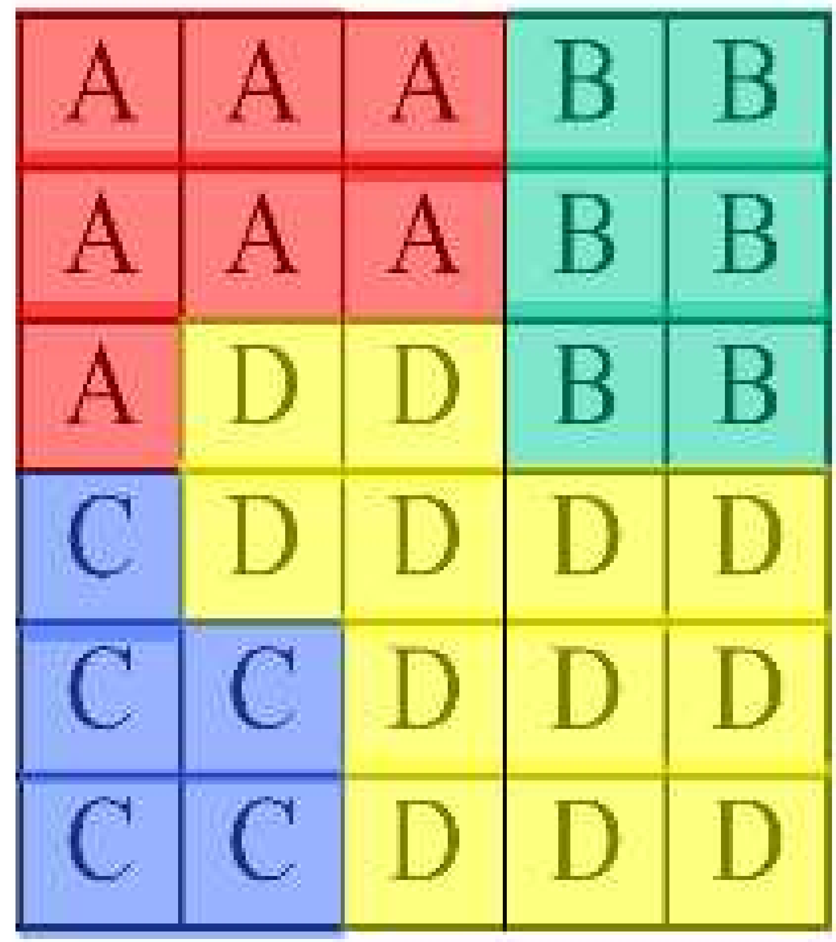


Ligne de partage des eaux (LPE)



LPE par conditions locales





Plusieurs solutions possibles

Ligne de partage des eaux : définition

Plus grande pente :

$$Desc(x) = \max\{\frac{f(x) - f(y)}{d(x,y)},\ y \in V(x)\}$$

Dénivelé d'un chemin $\pi = (x_0, ...x_n)$:

$$T_f(\pi) = \sum_{i=1}^{n} d(x_{i-1}, x_i) Cout(x_{i-1}, x_i)$$

avec

$$Cout(x,y) = \begin{cases} Desc(x) & \text{si } f(x) > f(y) \\ Desc(y) & \text{si } f(y) > f(x) \\ (Desc(x) + Desc(y))/2 & \text{si } f(y) = f(x) \end{cases}$$

Ligne de partage des eaux : définition

Distance topographique

$$T_f(x, y) = \inf\{T_f(\pi), \pi = (x_0 = x, x_1, ..., x_n = y)\}$$

(vaut 0 sur un plateau)

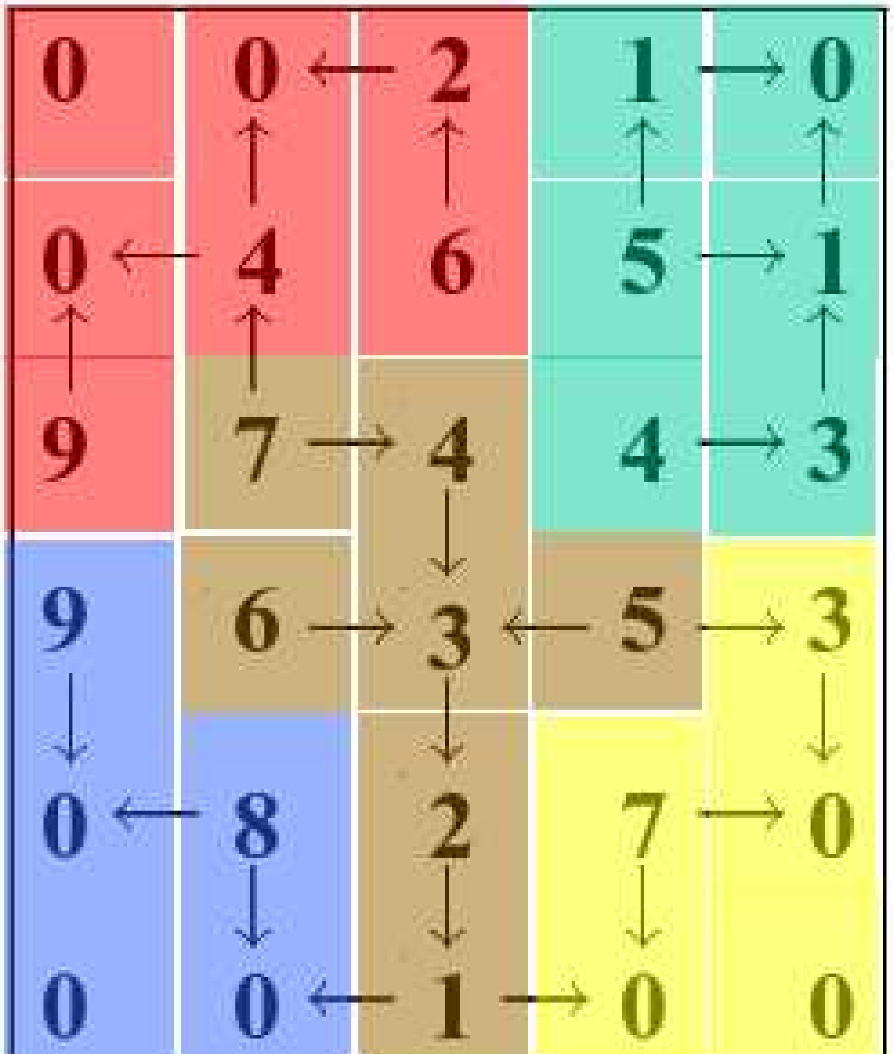
Bassin versant associé au minimum régional M_i :

$$BV(M_i) = \{x \mid \forall j \neq i, T_f(x, M_i) + f(M_i) < T_f(x, M_j) + f(M_j)\}$$

Ligne de partage des eaux :

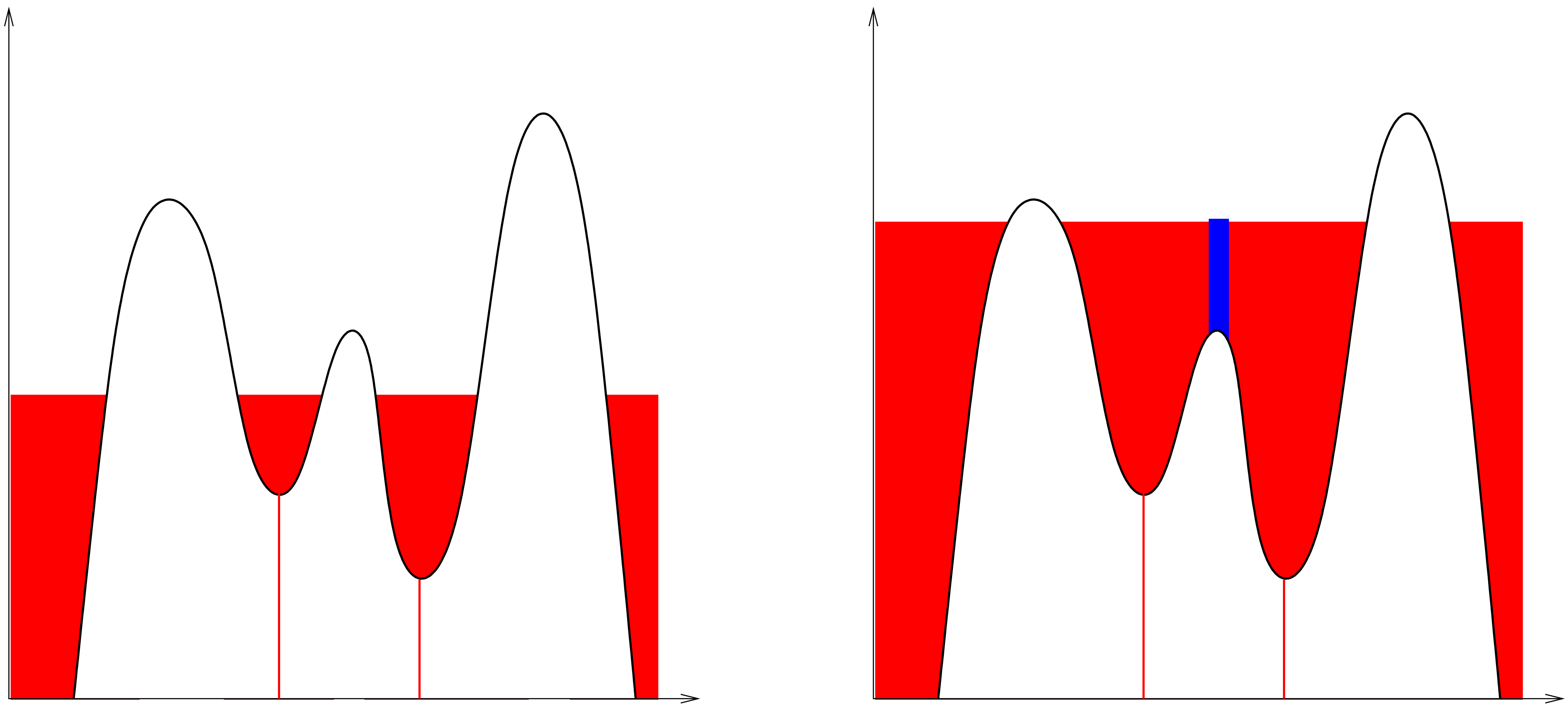
$$LPE(f) = [\cup_i BV(M_i)]^C$$

LPE par distance topographique

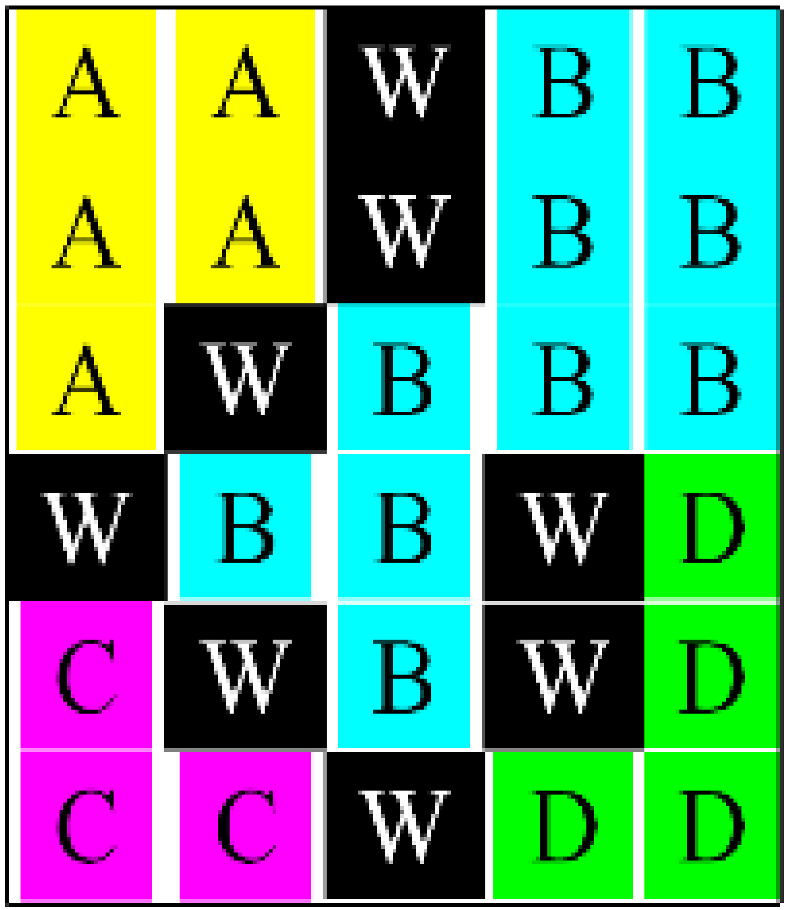


Solution unique, lignes pas forcément fines.

Approche par immersion



Approche par immersion



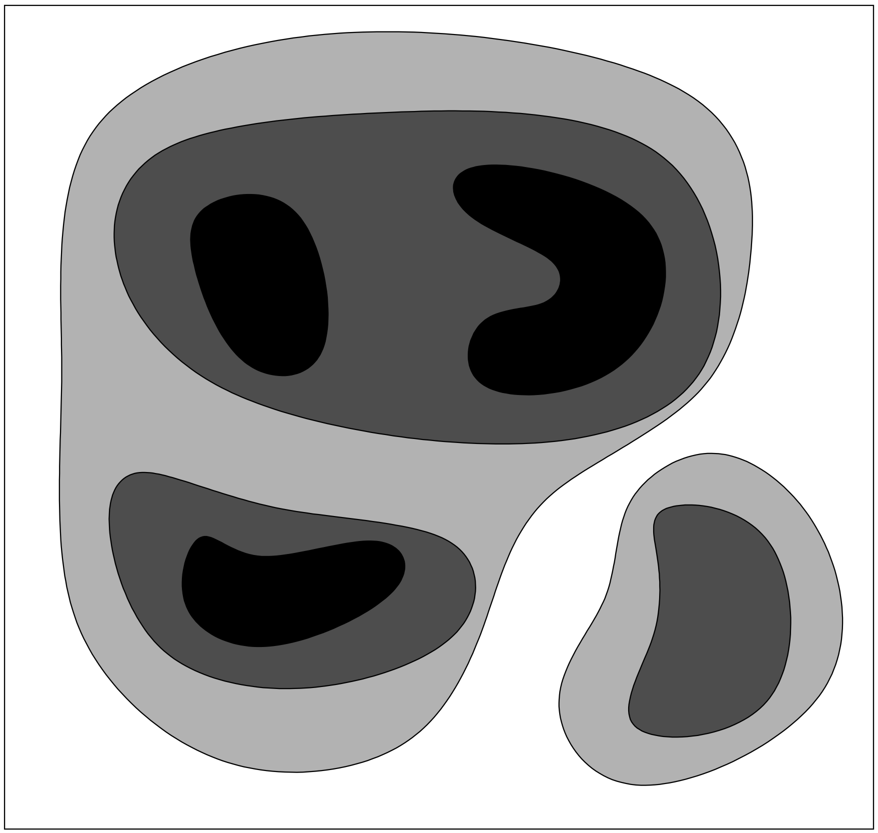
Lignes par forcément fines.

Construction de la ligne de partage des eaux

f telle que $f(x) \in [h_{\min}, h_{\max}]$, $f^h = \{x \mid f(x) \leq h\}$

$$
\begin{aligned}
X_{h_{\min}} &= f^{h_{\min}} \\
X_{h+1} &= MinReg_{h+1}(f) \cup ZI_{f^{h+1}}(X_h) \\
BV &= X_{h_{\max}} \\
LPE(f) &= X^C_{h_{\max}}
\end{aligned}
$$

Illustration de l'algorithme



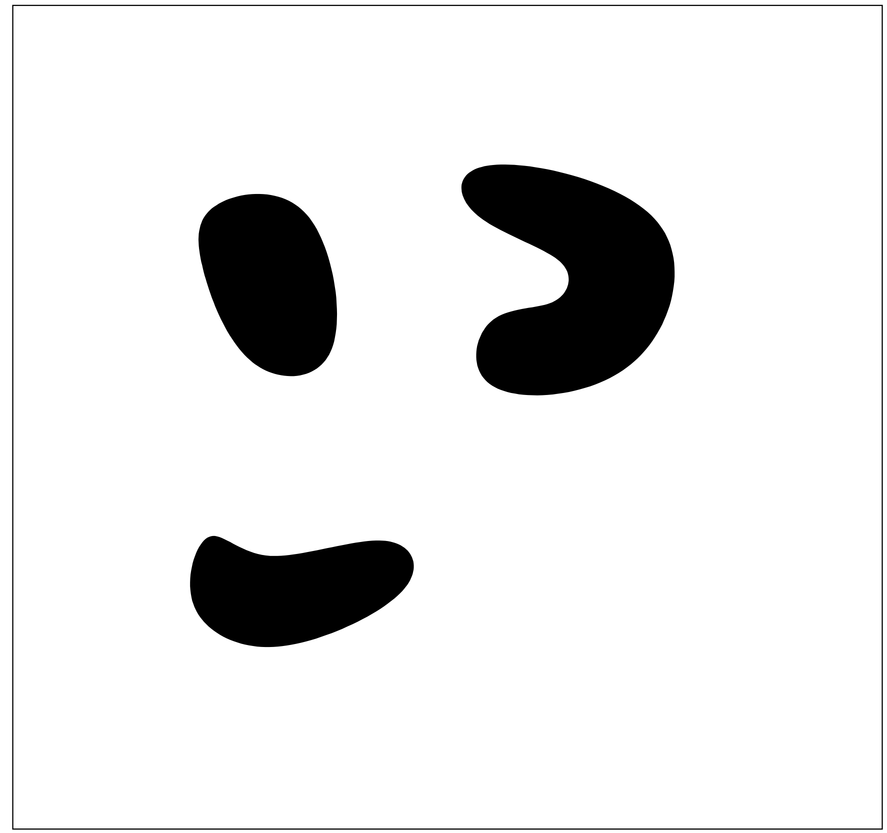
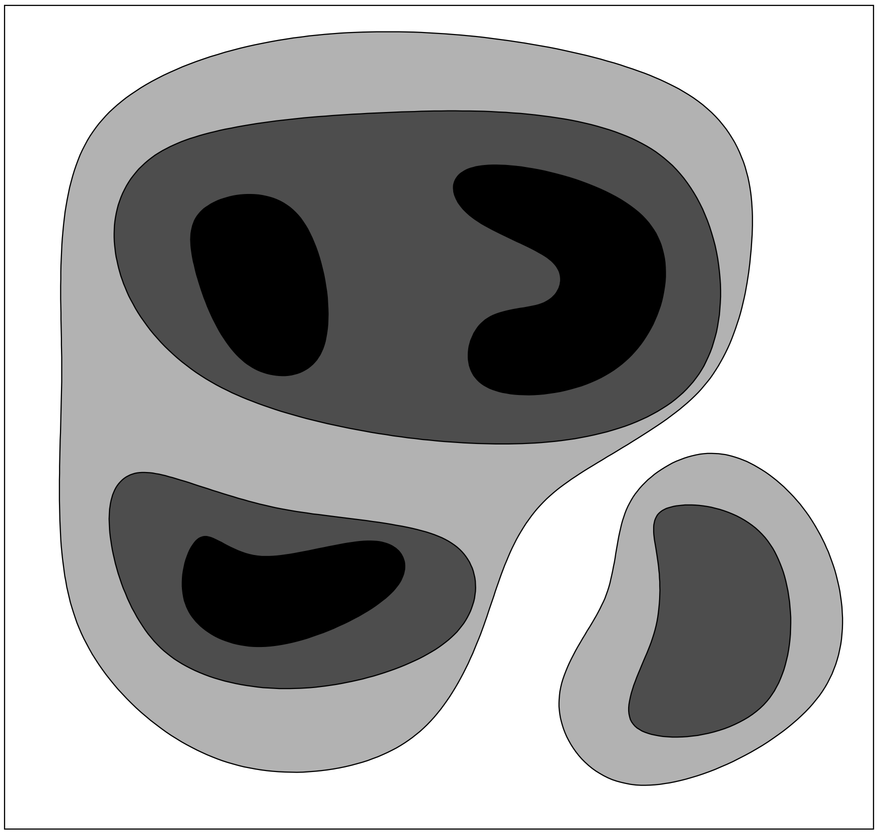


Illustration de l'algorithme



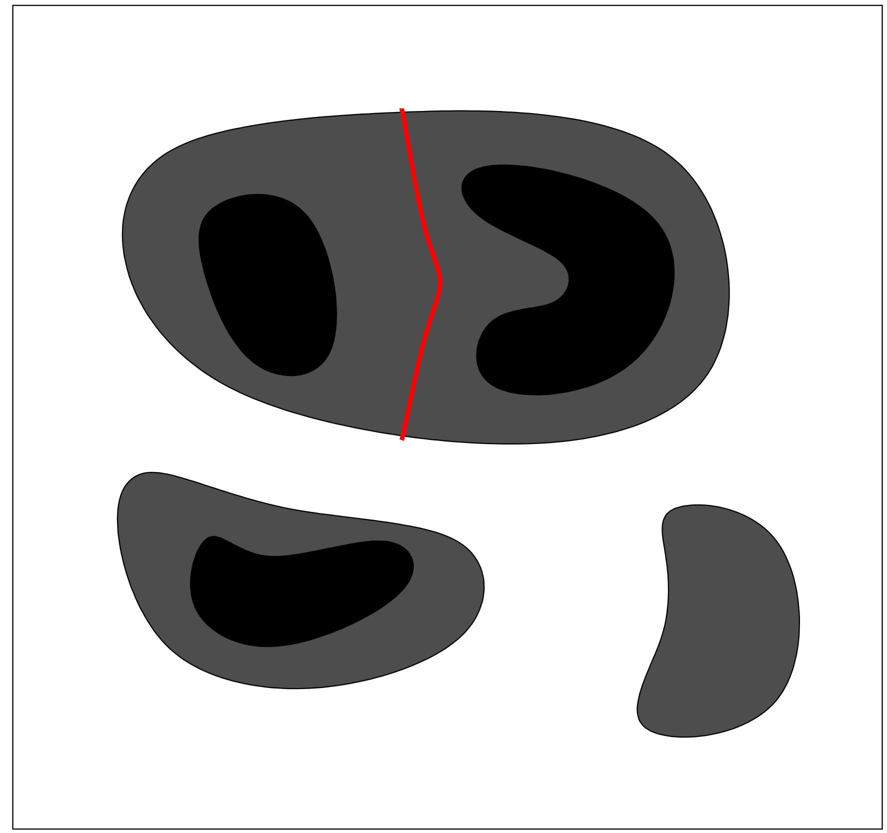


Illustration de l'algorithme

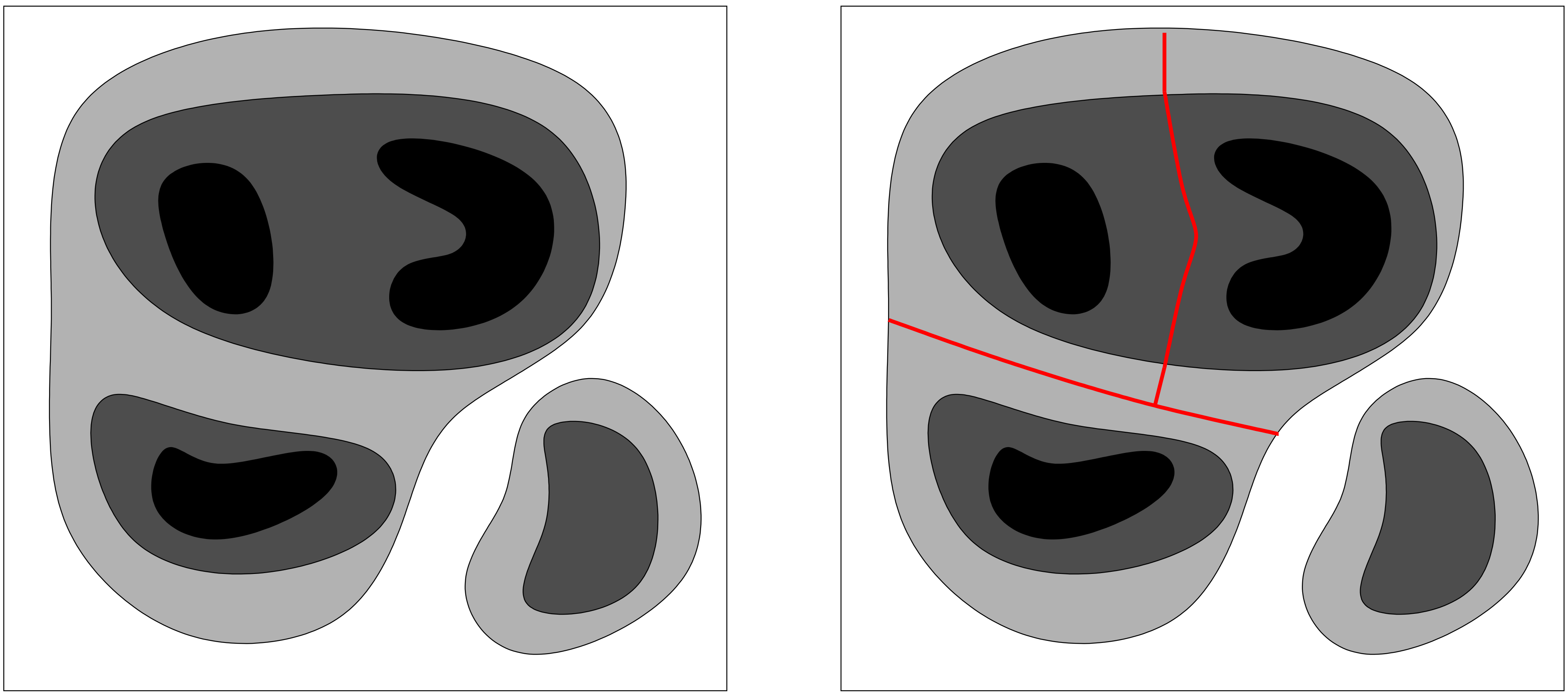
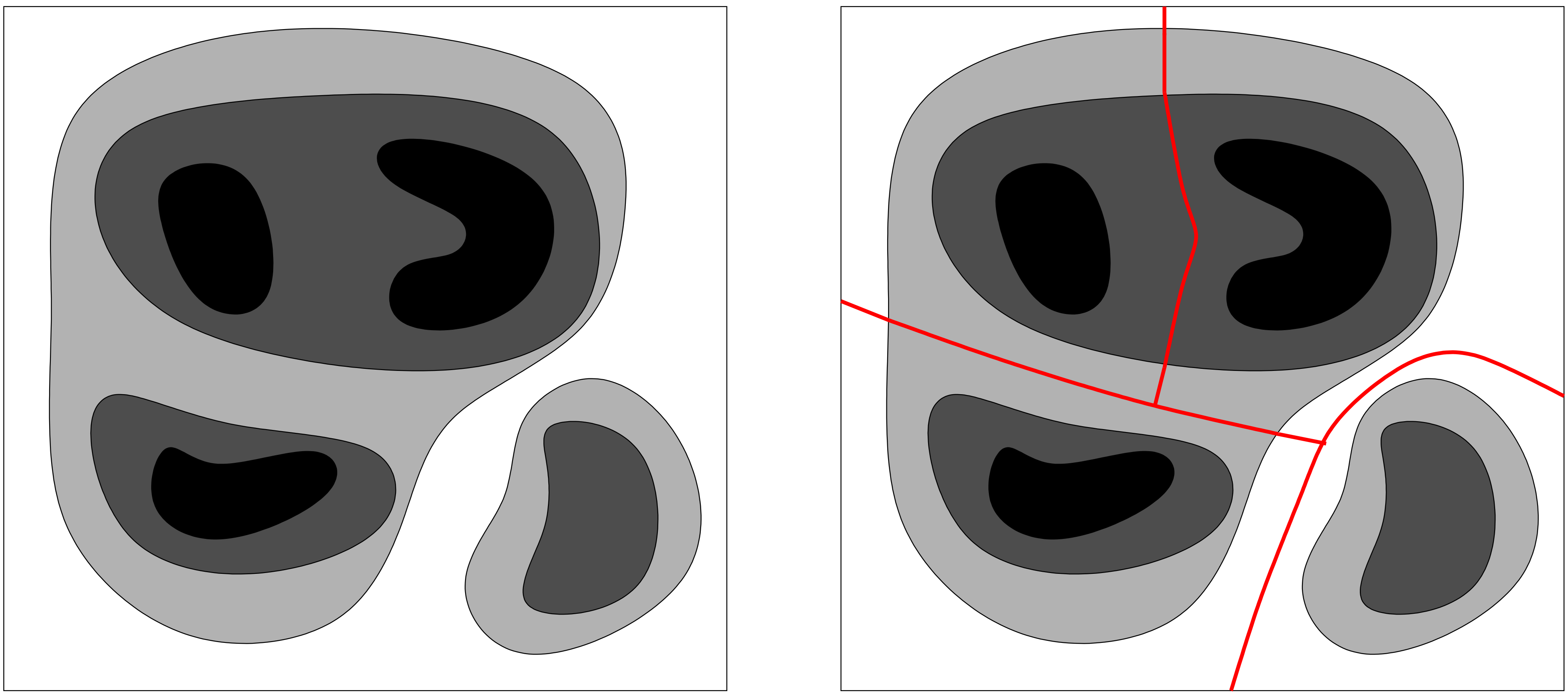
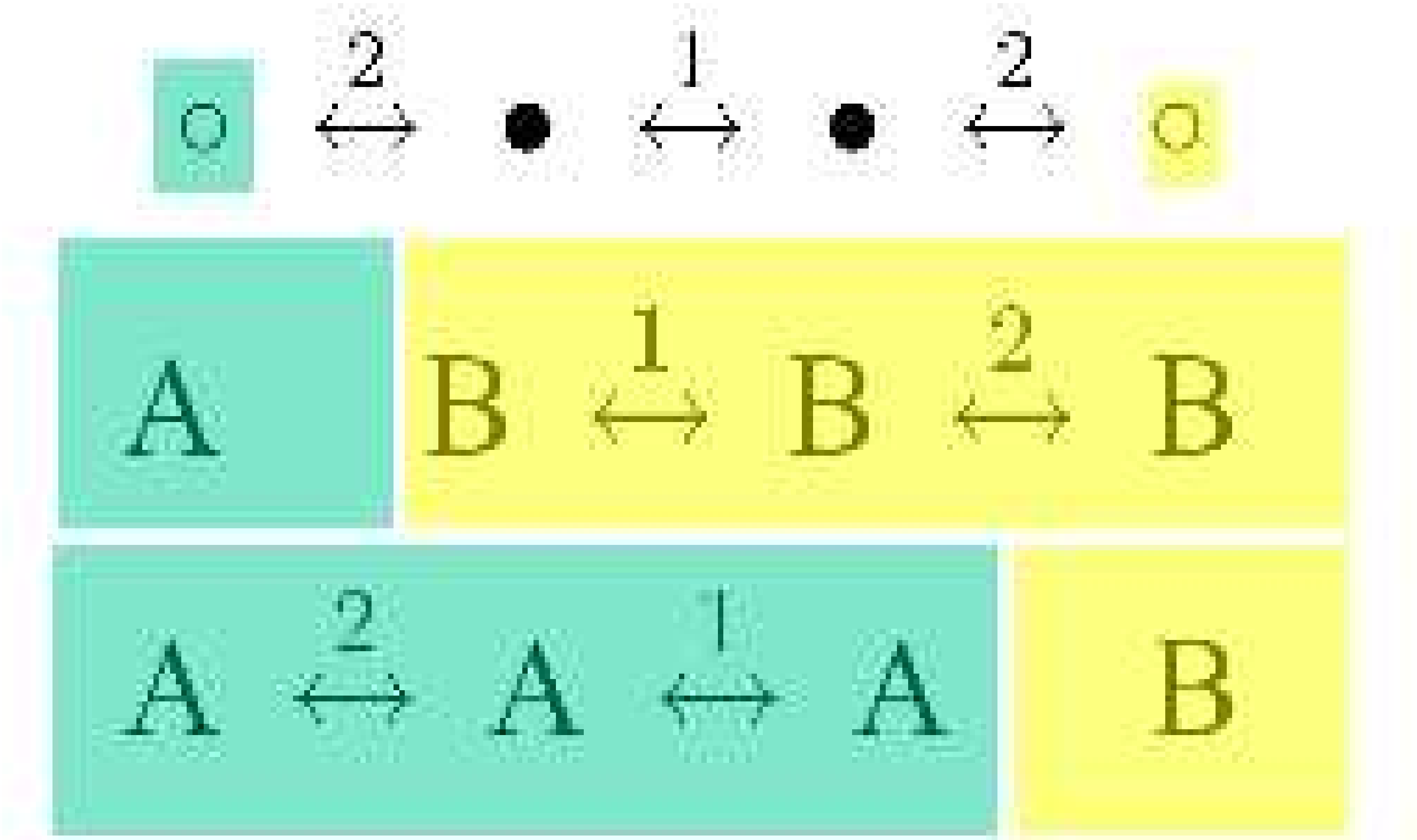


Illustration de l'algorithme

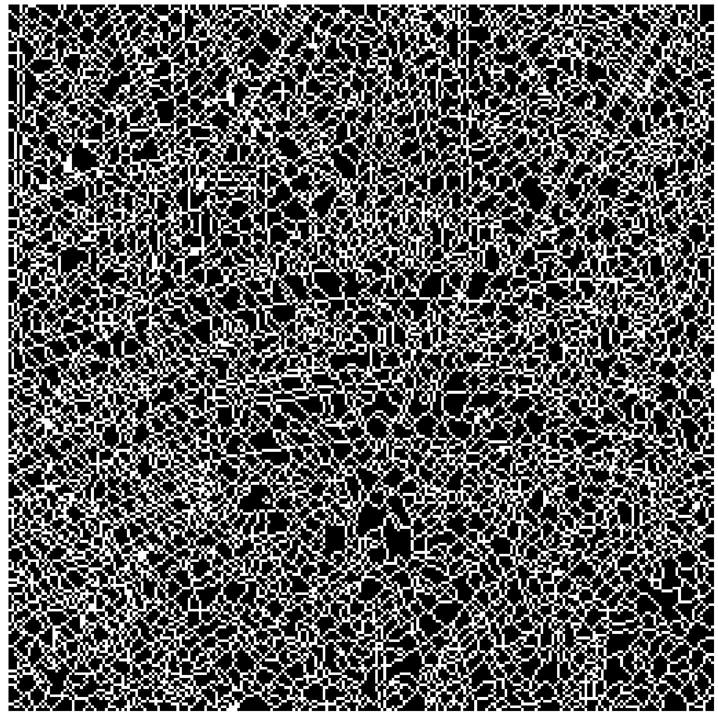


Minimum spanning forest

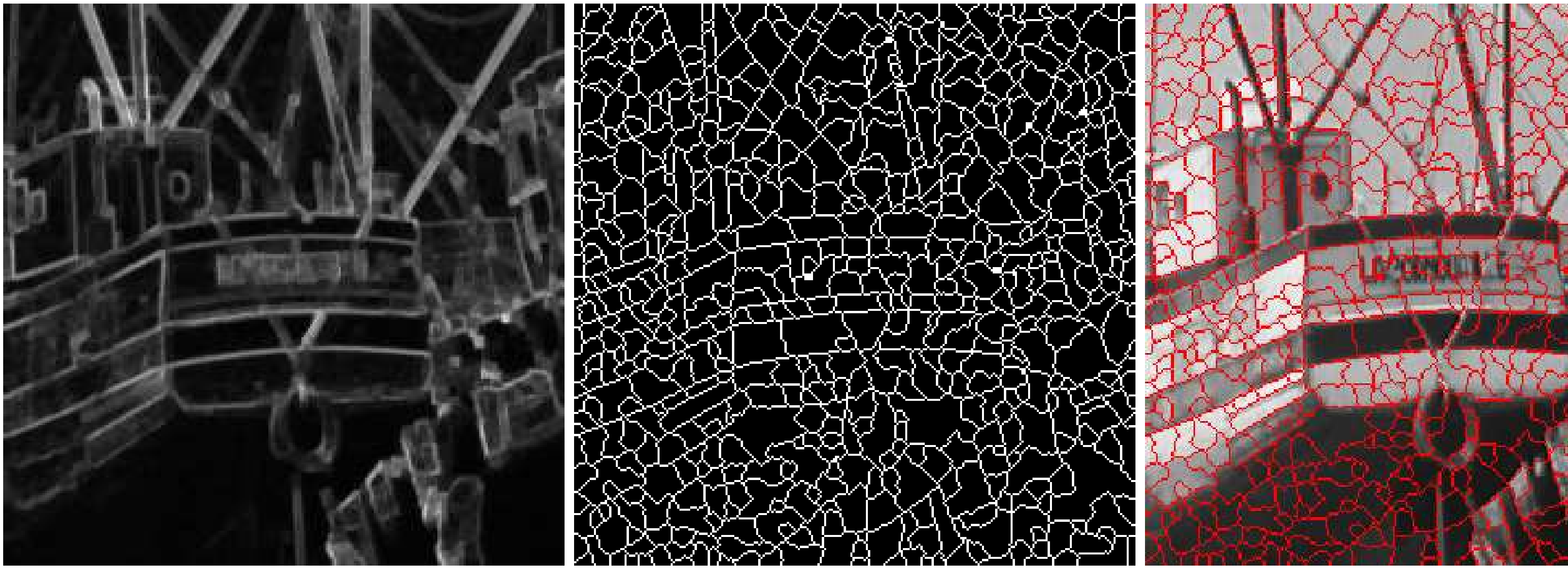


(MSF $\Rightarrow$ LPE par chemin le plus court, mais pas la réciproque)

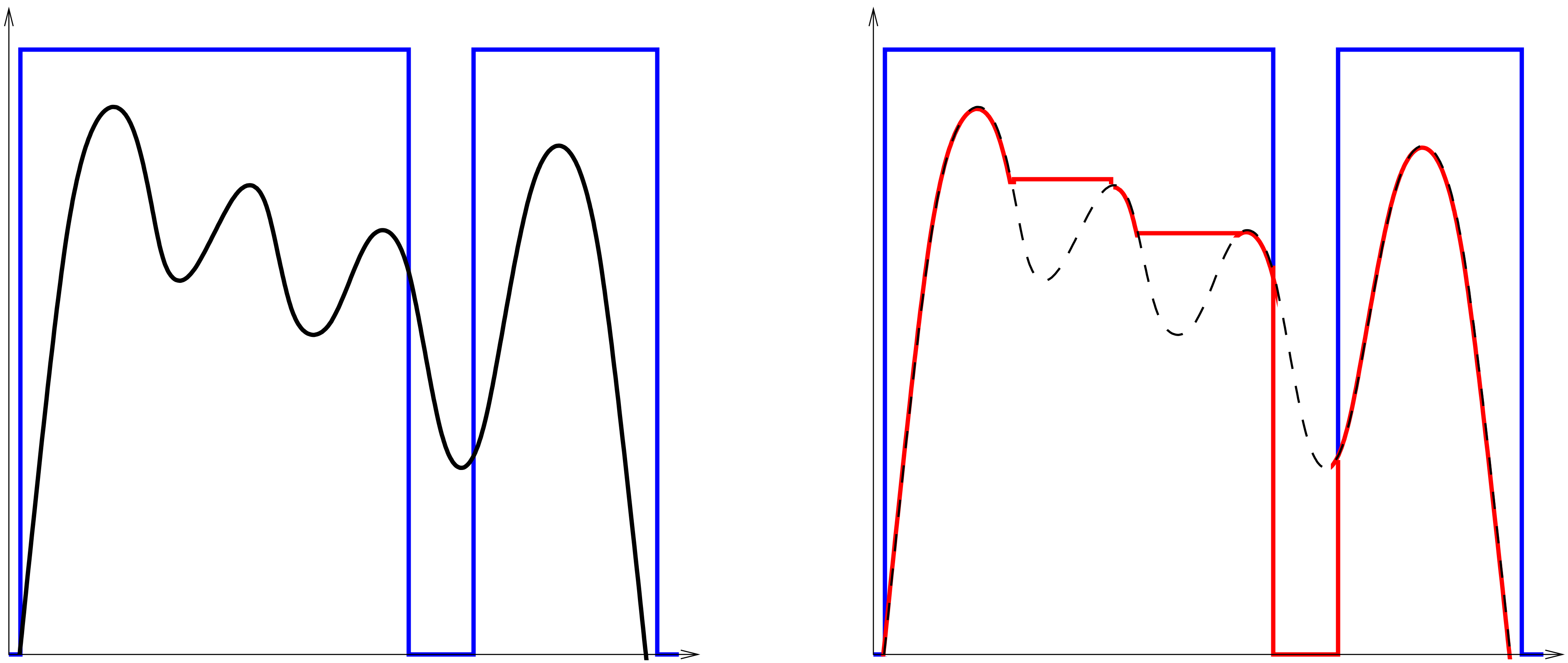
Ligne de partage des eaux et sur-segmentation


Ligne de partage des eaux et sur-segmentation

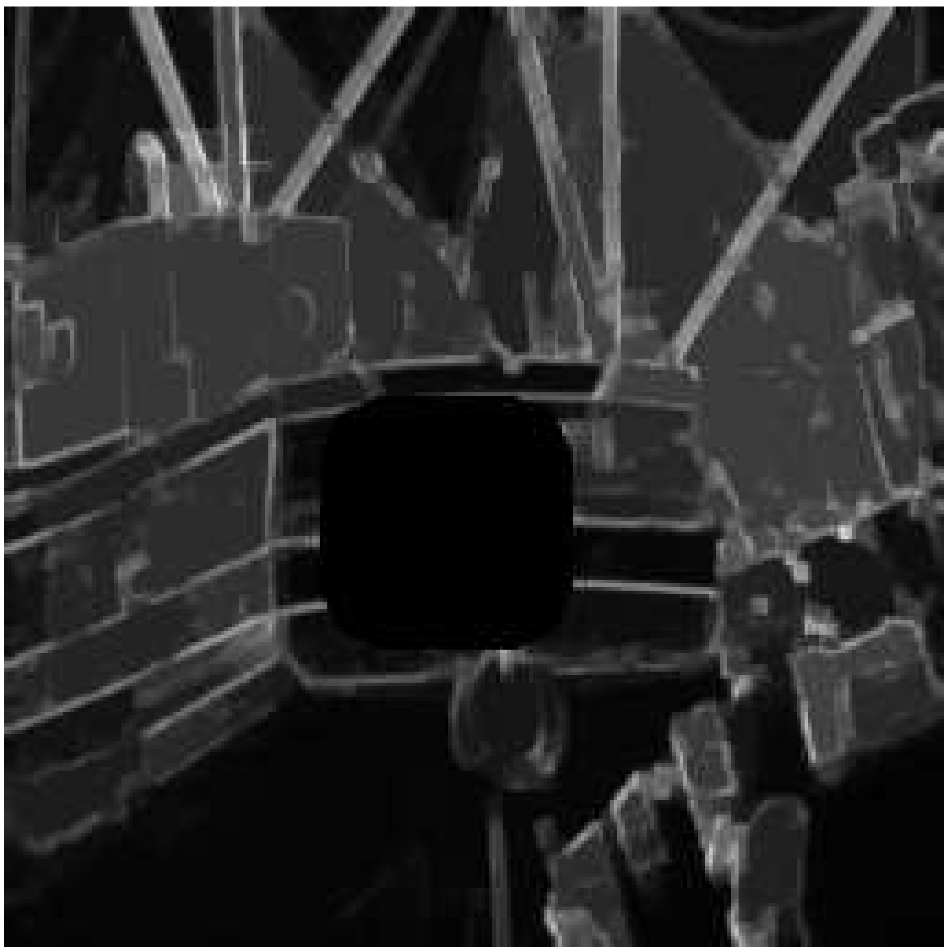


Erosion géodésique pour imposer des marqueurs

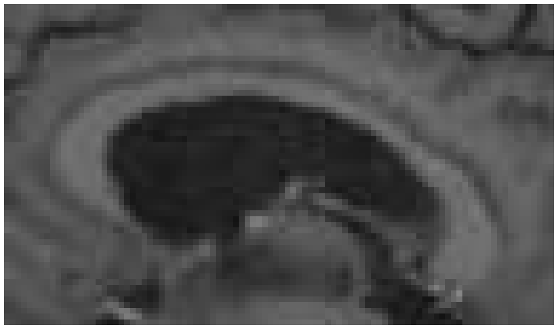


Ligne de partage des eaux contrainte par des marqueurs

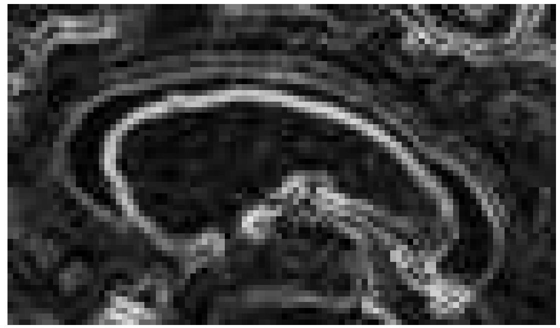
f : fonction sur laquelle on veut appliquer la ligne de partage des eaux
g : fonction de marquage (sélectionne des minima régionaux)
Reconstruction : $E_{f \wedge g}(g, B_\infty)$ (seulement les minima sélectionnés)



Exemple

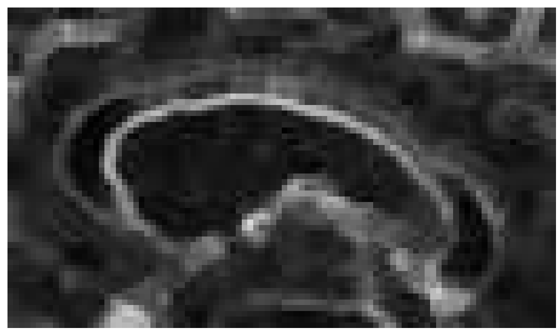


(a)

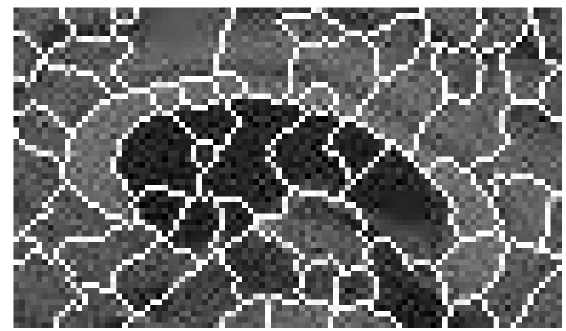


(b)

(c)



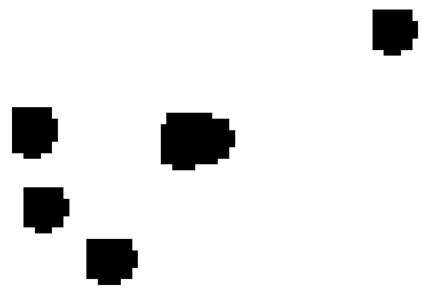
(d)



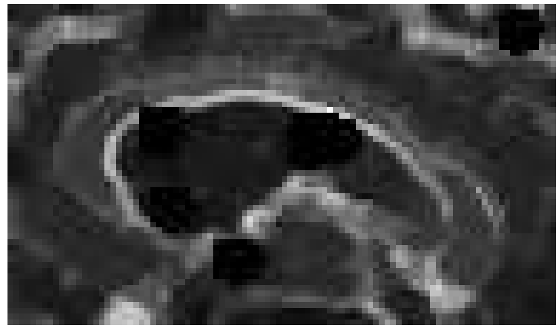
(e)

(a) Image originale, extraite d’une image IRM du cerveau. (b) Gradient morphologique. (c) Ligne de partage des eaux superposée à l’image initiale. (d) Fermeture de taille 1 de l’image de gradient. (e) Ligne de partage des eaux du gradient fermé.

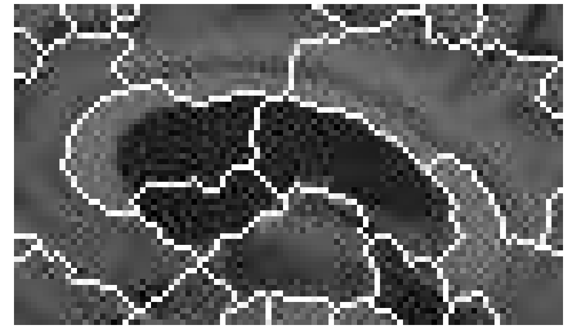
Exemple



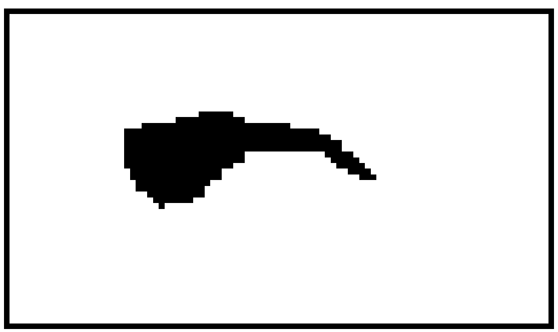
(f)



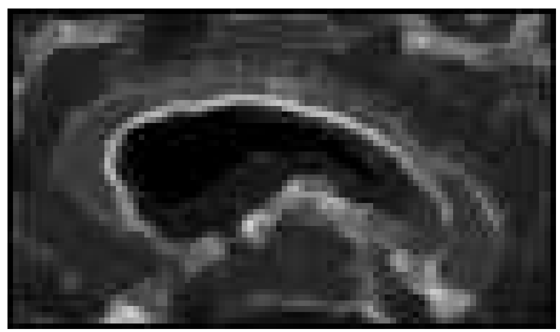
(g)



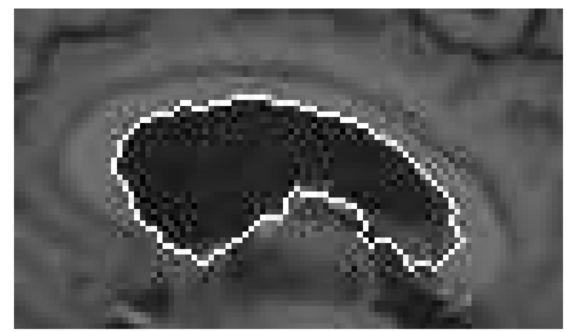
(h)



(i)



(j)

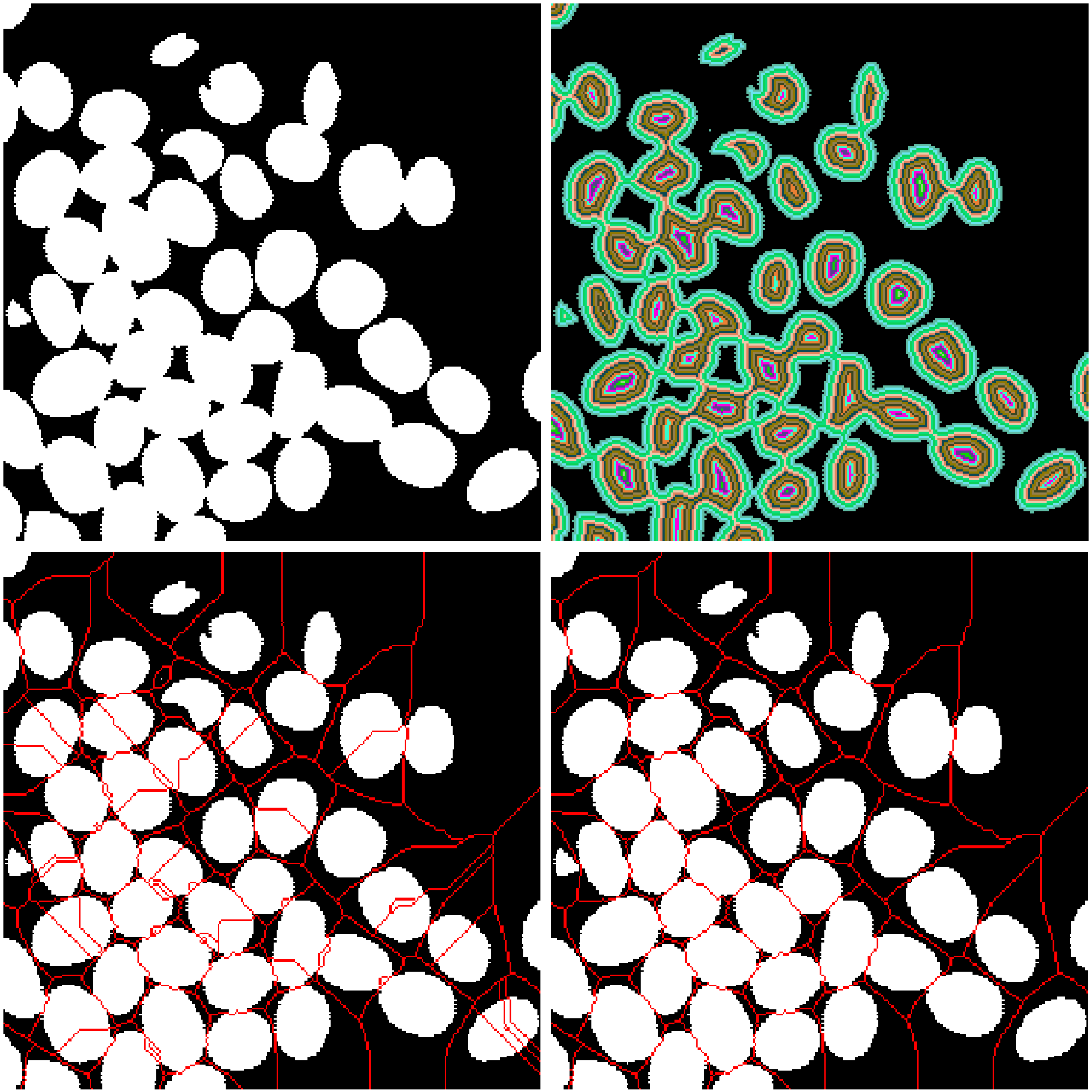


(k)

(f) Marqueurs donnés par les minima régionaux. (g) Reconstruction du gradient. (h) Ligne de partage des eaux. (i) Marqueurs dans les ventricules (partie noire centrale) et au bord de l'image. (j) Gradient reconstruit. (k) Ligne de partage des eaux donnant bien les contours du ventricule.

Marqueurs interactifs

Séparation d'objets binaires connectés



LPE par minimisation d'énergie

Minimisation d'une énergie exprimant la fidélité (Boomgard, 2000) :

$$E = \sum_i \int \int_{D_i} (f(D_i) + T_f(x, D_i))dx$$

D_i = minimum local
$f(D_i)$ = valeur du minimum local

Régularisation de la LPE

- par fermeture
- watersnakes (Boomgard, 2003) : terme supplémentaire sur la longueur des contours dans l’énergie

$$E = \sum_i \left(\int \int_{D_i} (f(D_i) + T_f(x, D_i))dx + \beta \int_{\partial D_i} ds \right)$$

- contraintes de géométrie
- innondation "visqueuse" (Vachier et Meyer)

Watersnakes : exemples (Boomgard, 2003)

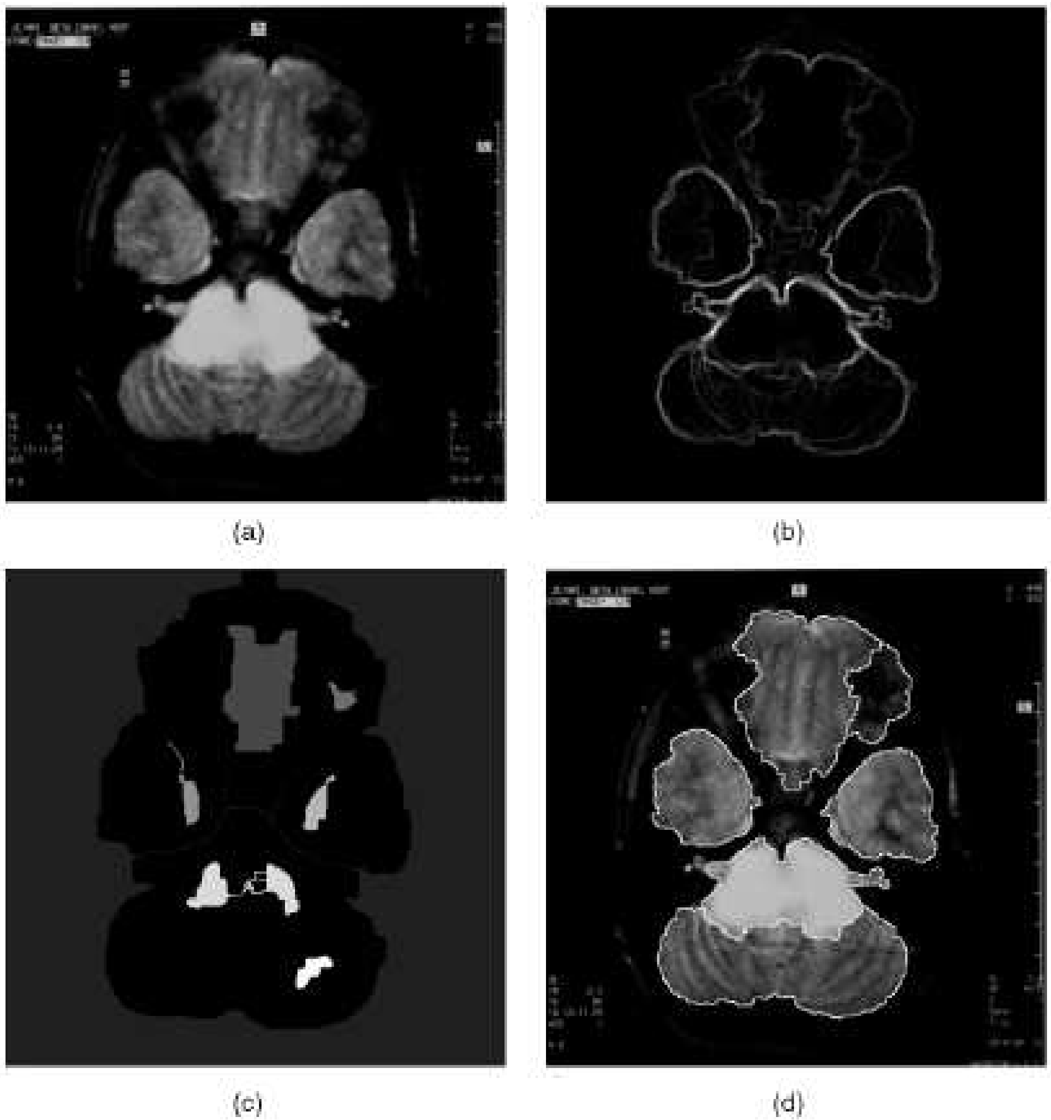
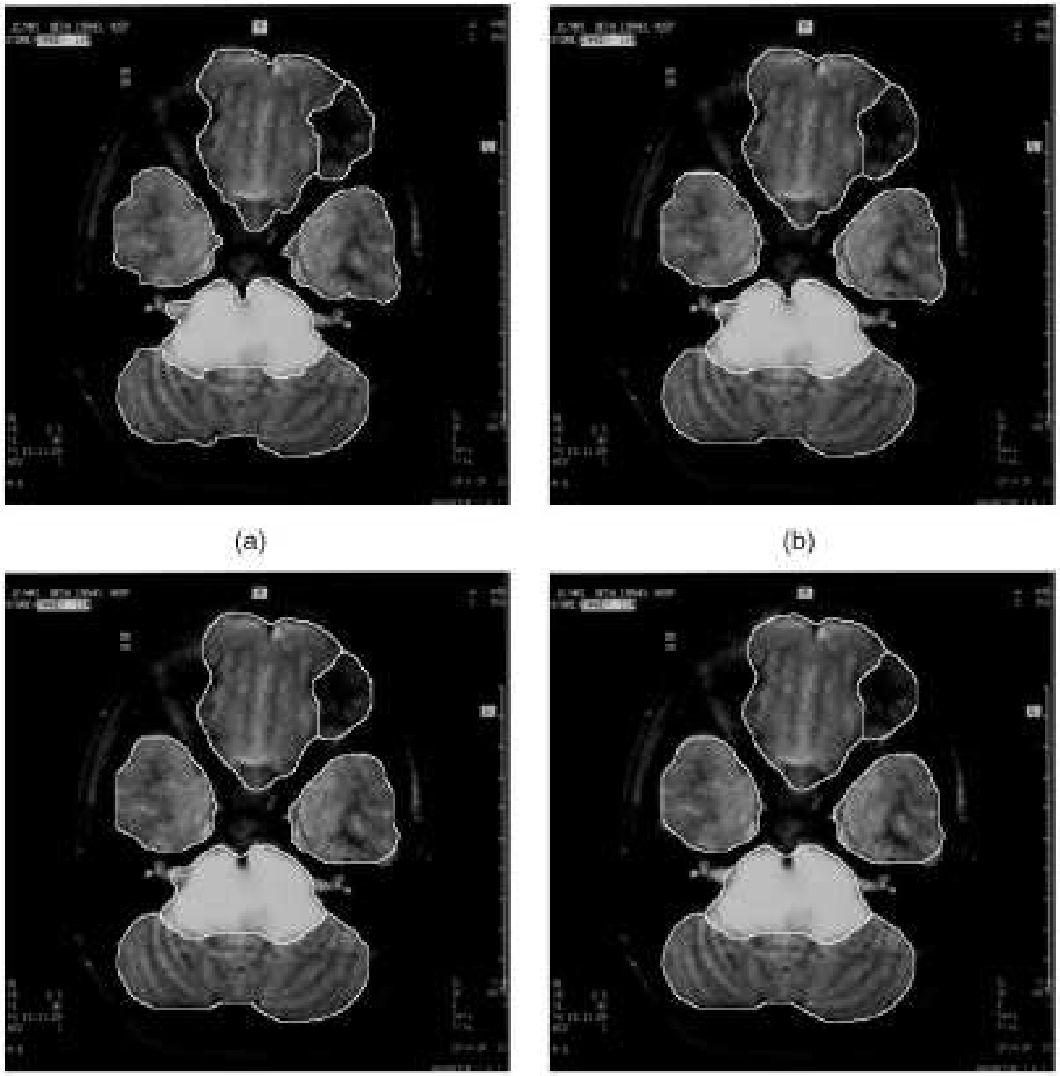


Fig. 6. (a) A brain image. (b) The relief computed from morphological gradient. (c) The markers extracted. (d) The result of the original watershed segmentation, shown for comparison.

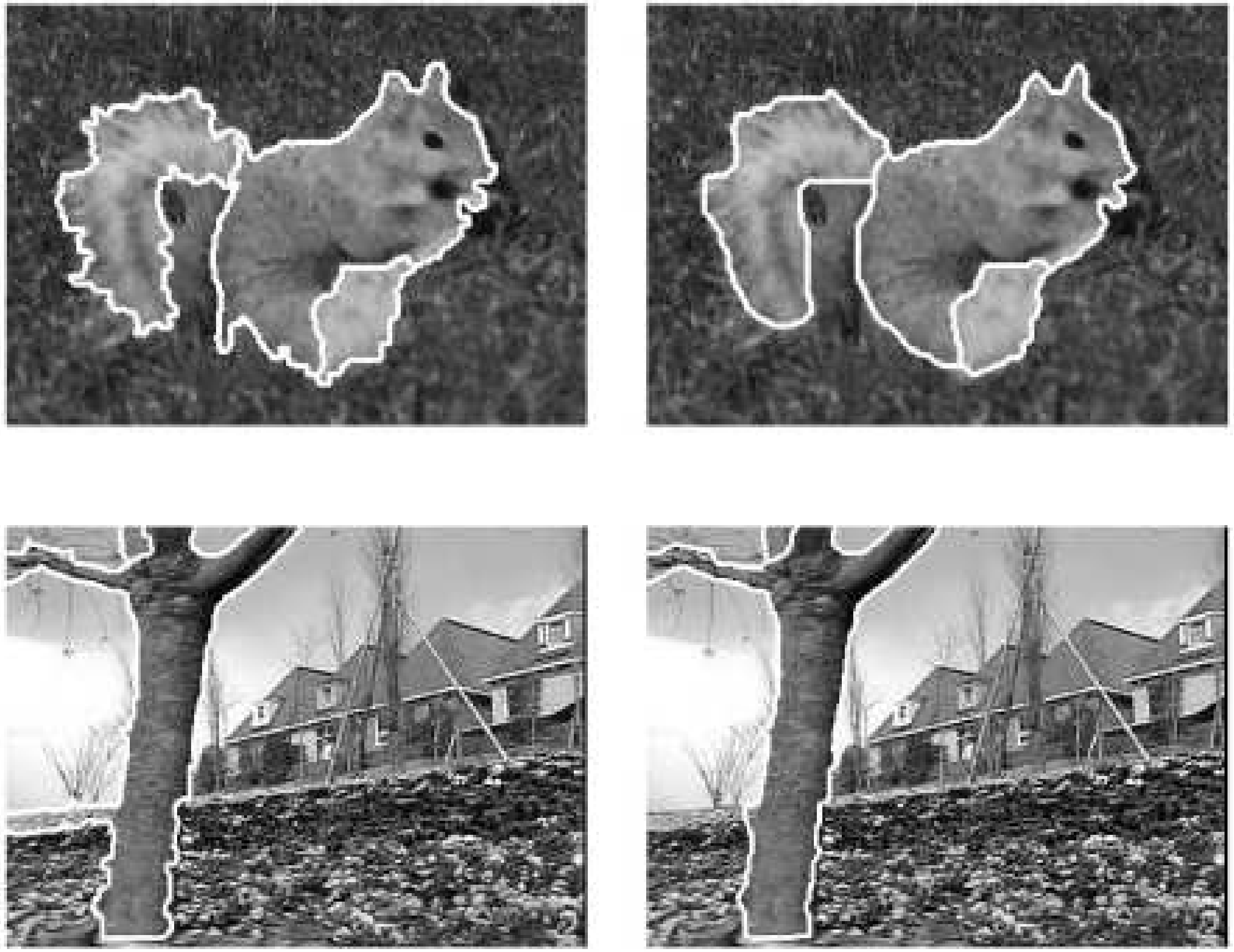
Watersnakes : exemples (Boomgard, 2003)



(a) (b) (c) (d)

Fig. 7. The segmentation result of the watersnake algorithm based on energy discretization with (a) $\beta = 10$, (b) $\beta = 50$, (c) $\beta = 100$, and (d) $\beta = 150$. Note, in comparison with the original watershed segmentation in Fig. 6d, that the results in figure are smoother, but still identify the main objects.

Watersnakes : exemples (Boomgard, 2003)

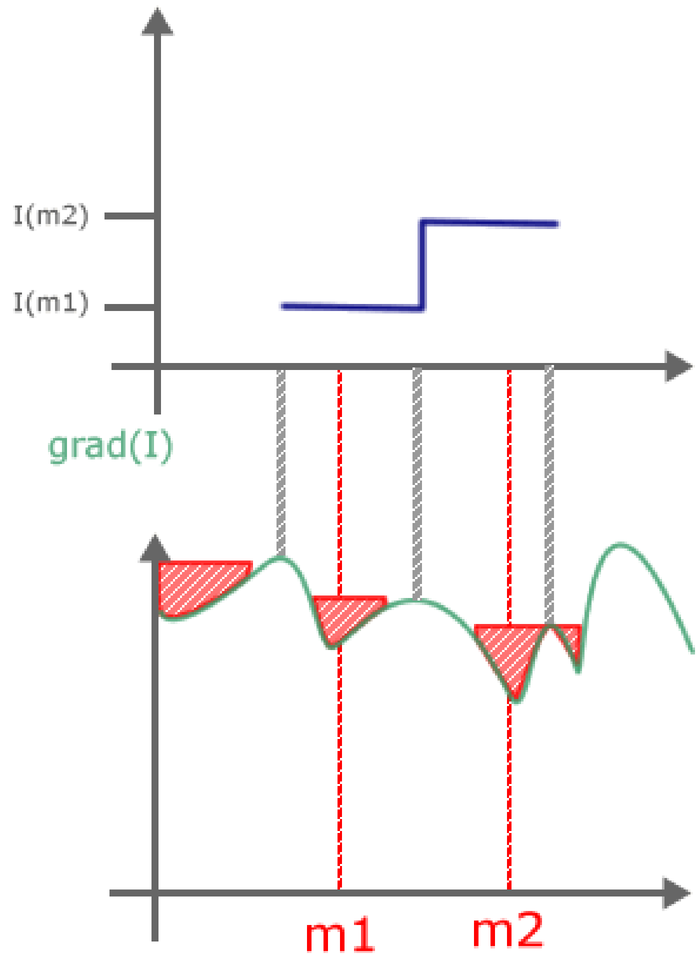


(a) (b)

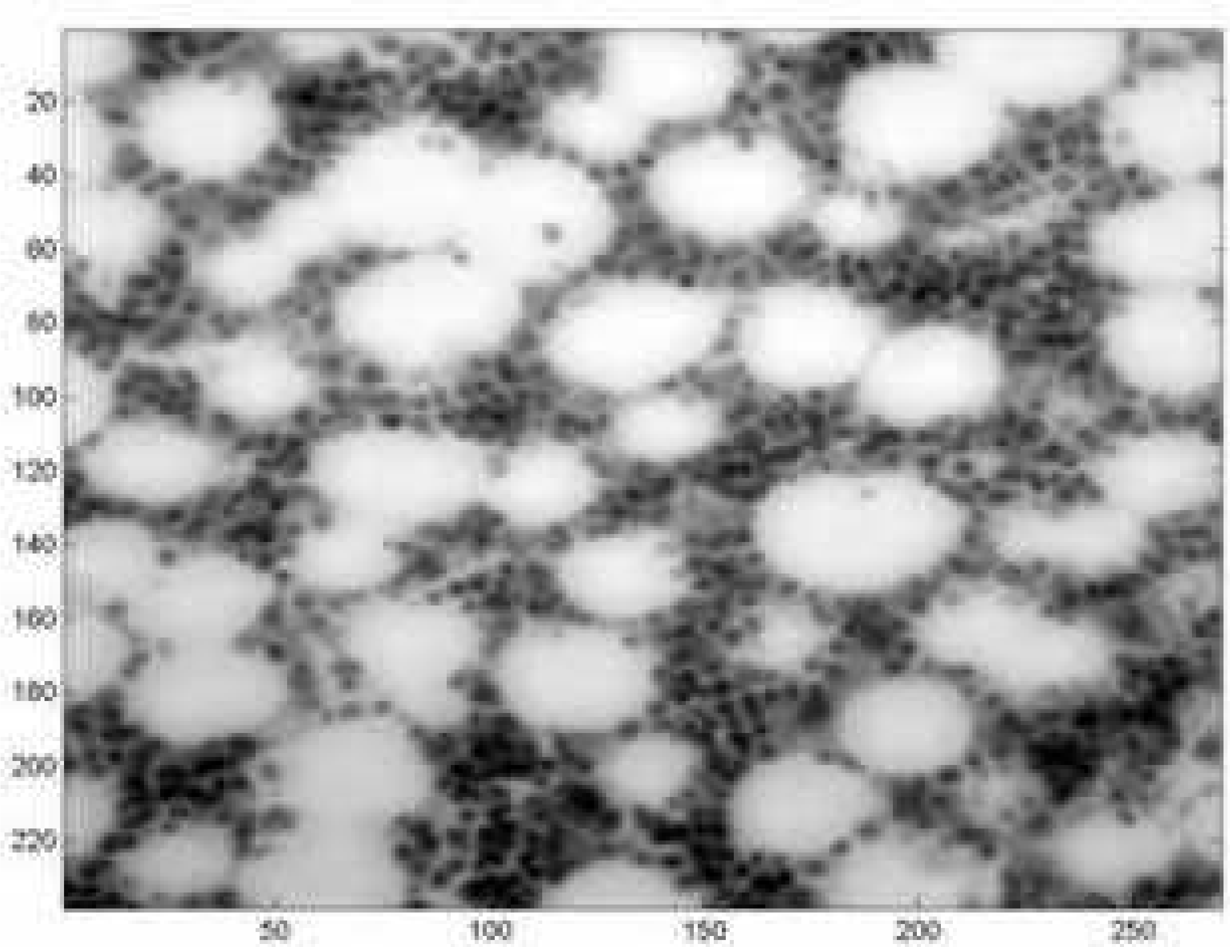
Fig. 8. Segmentation by (a) watershed and (b) watersnake ($\beta = 50$). In the bottom row, the result is shown for the object of interest only.

LPE hiérarchique

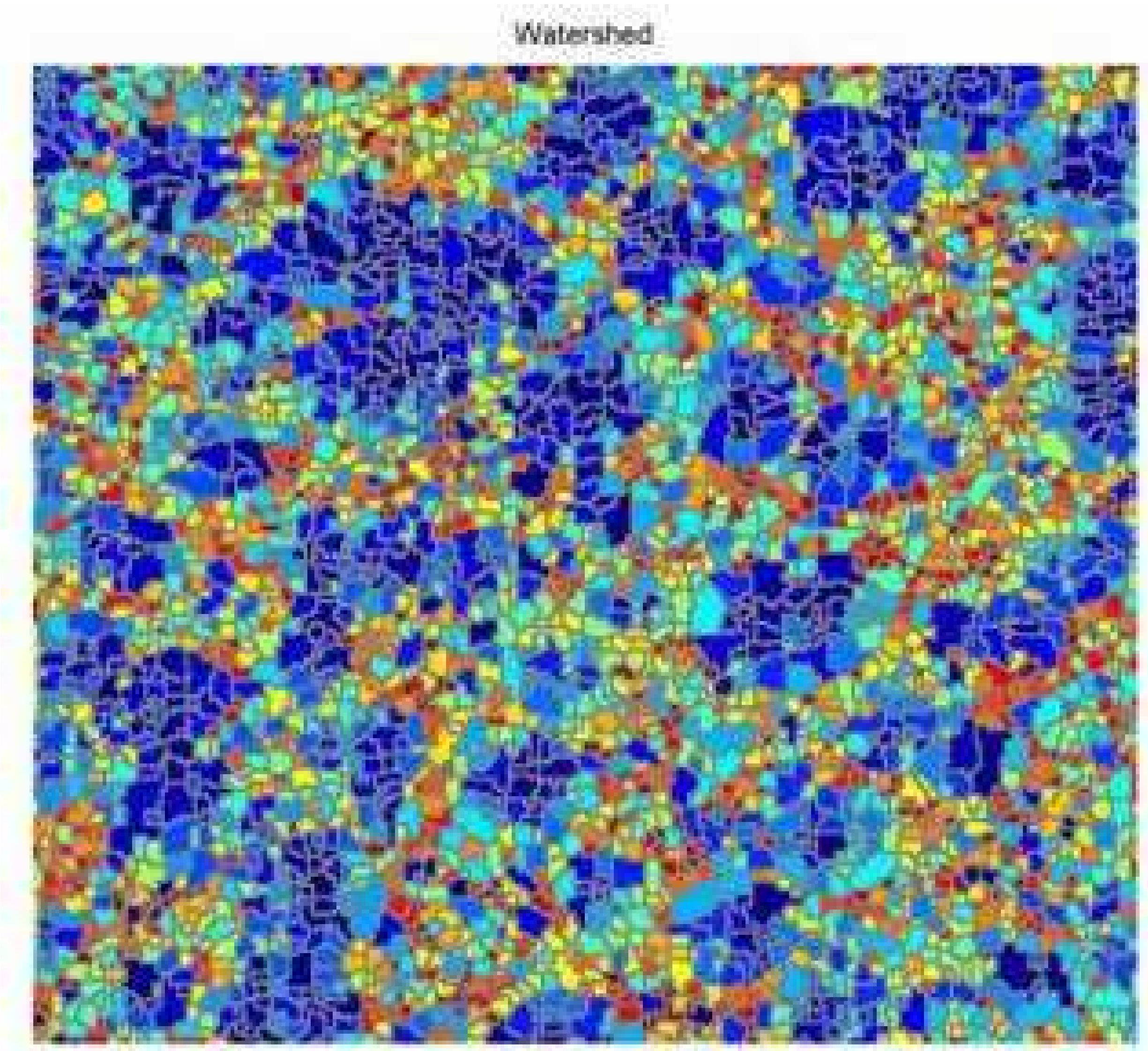
Remplissage des bassins versants (peut être itéré) :



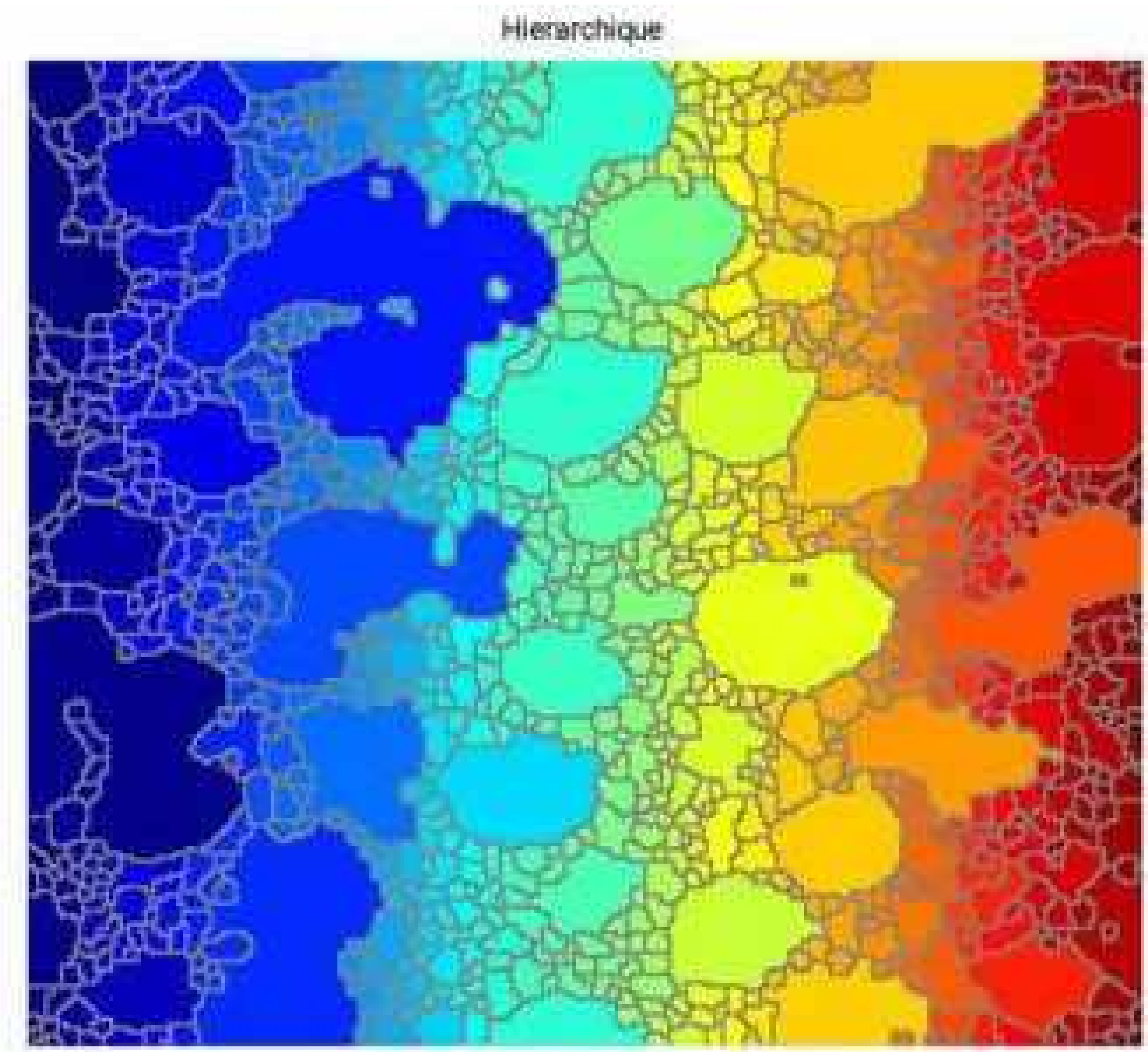
LPE hiérarchique



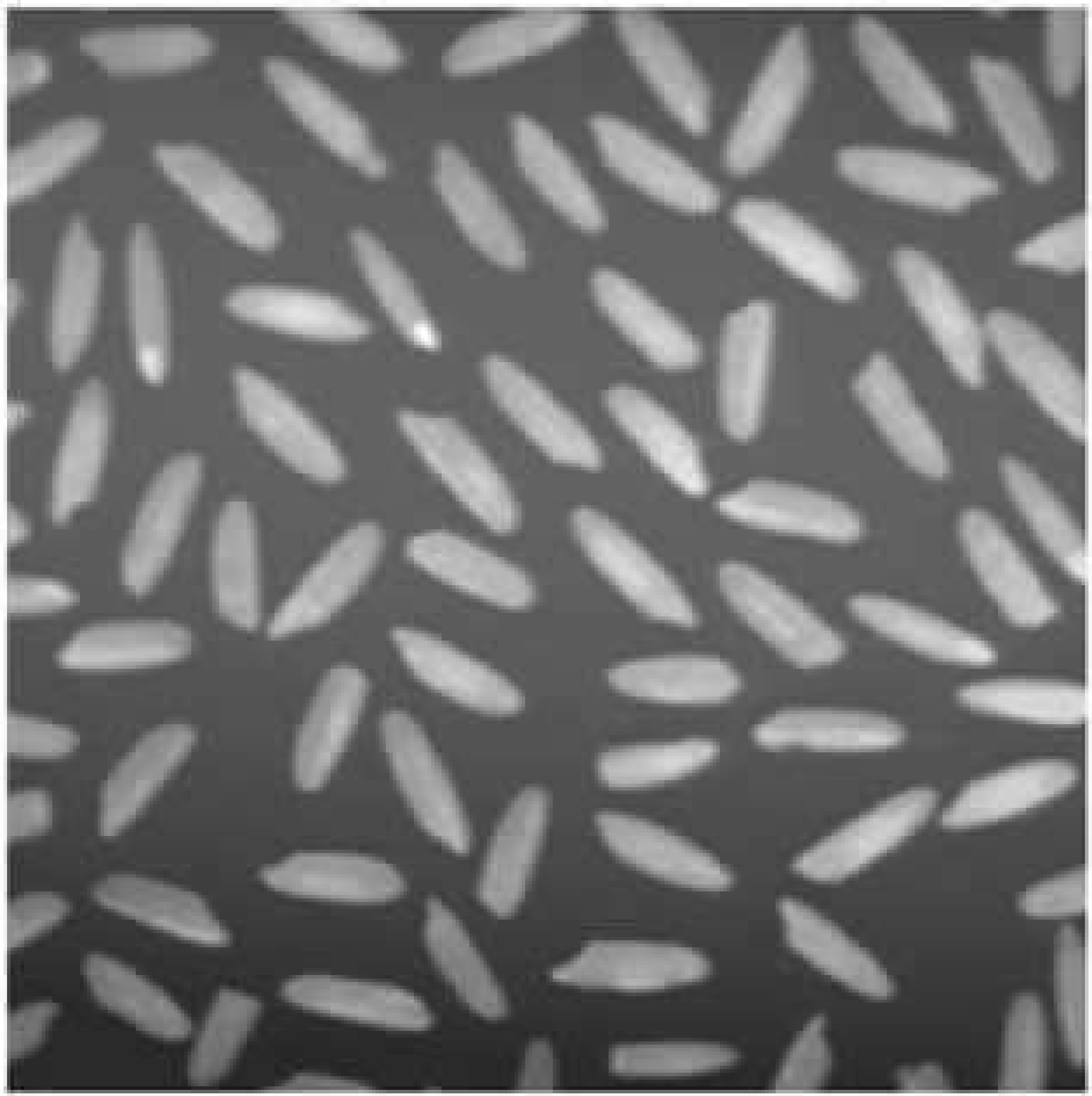
LPE hiérarchique



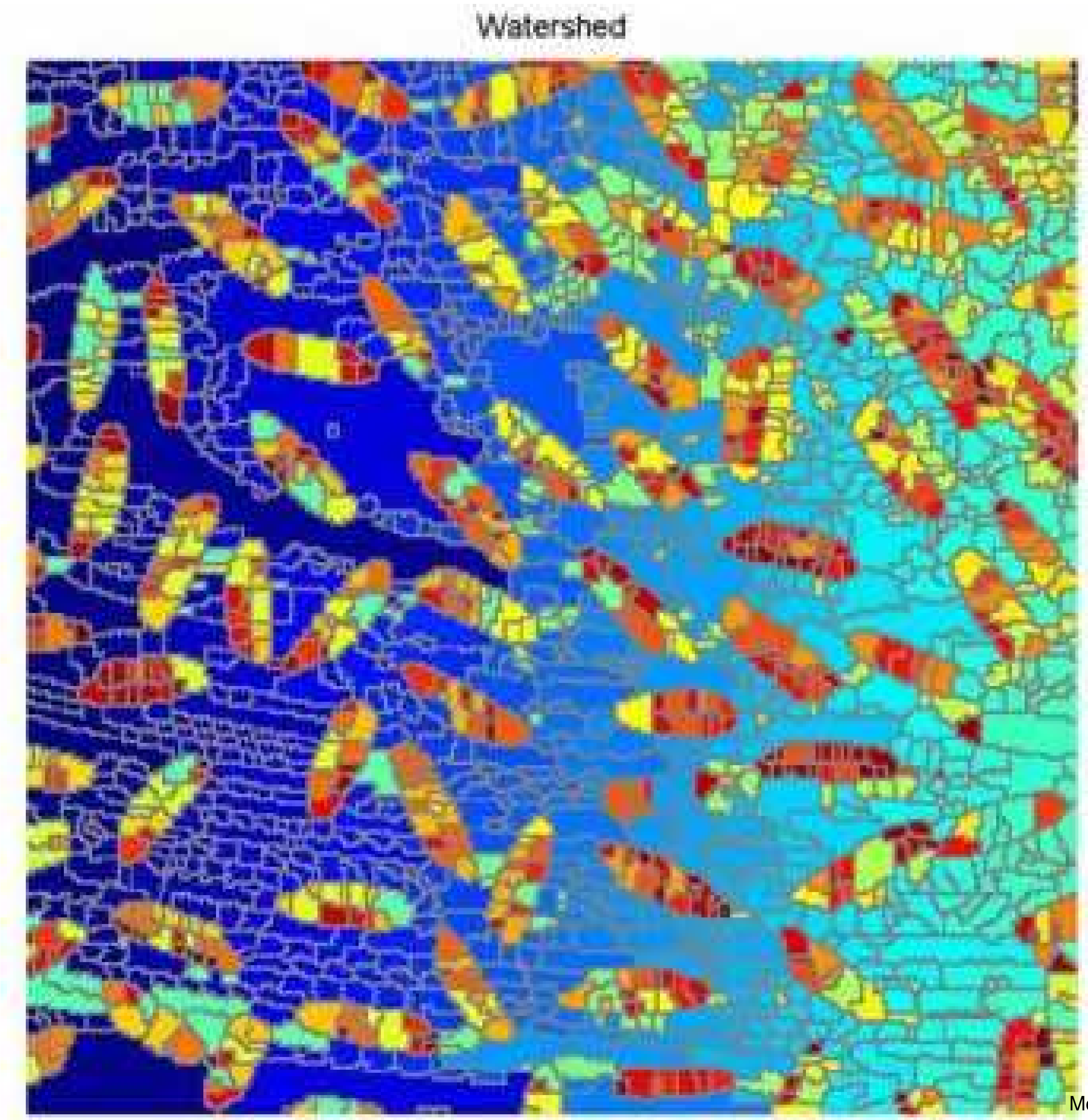
LPE hiérarchique



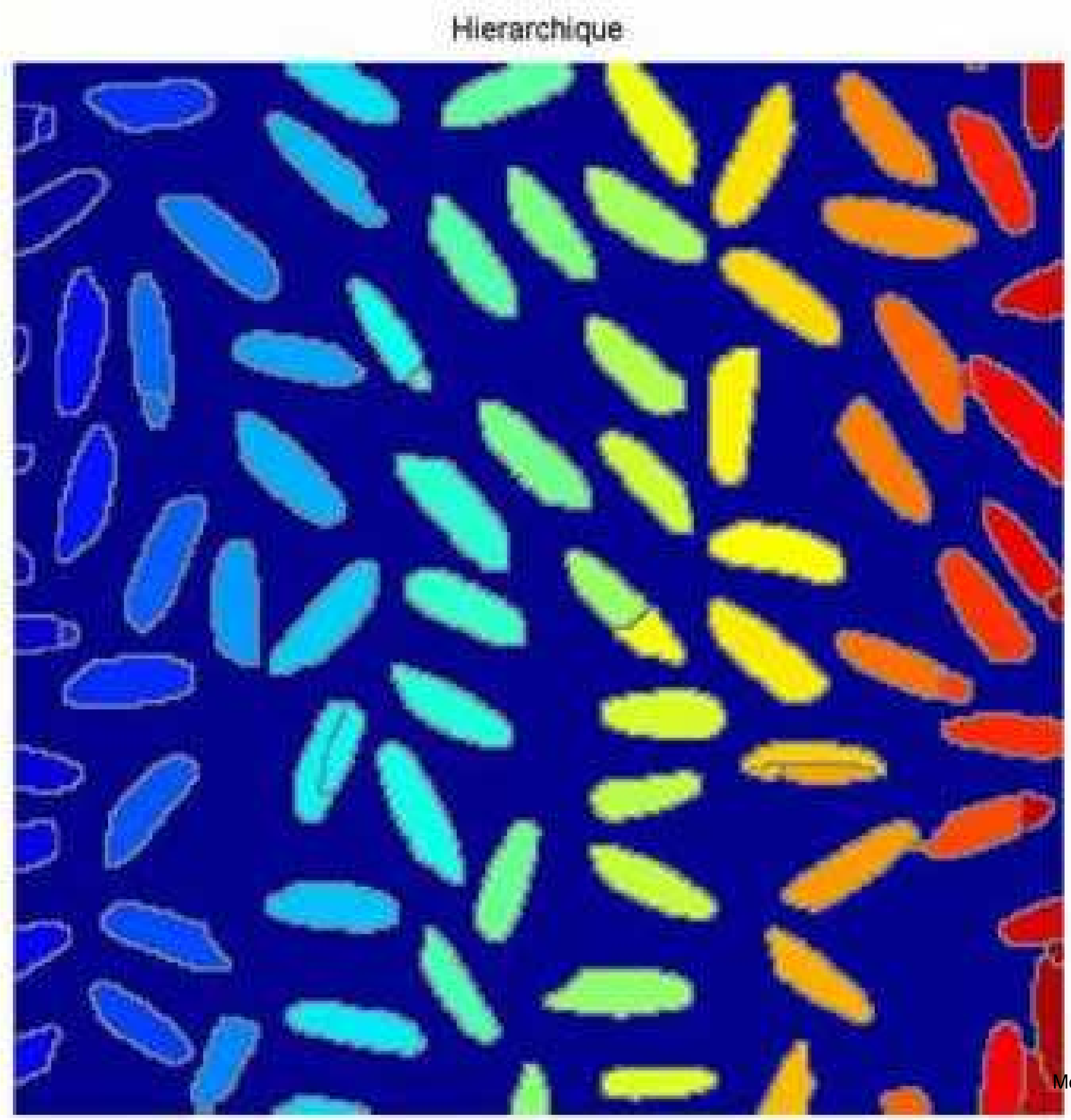
LPE hiérarchique



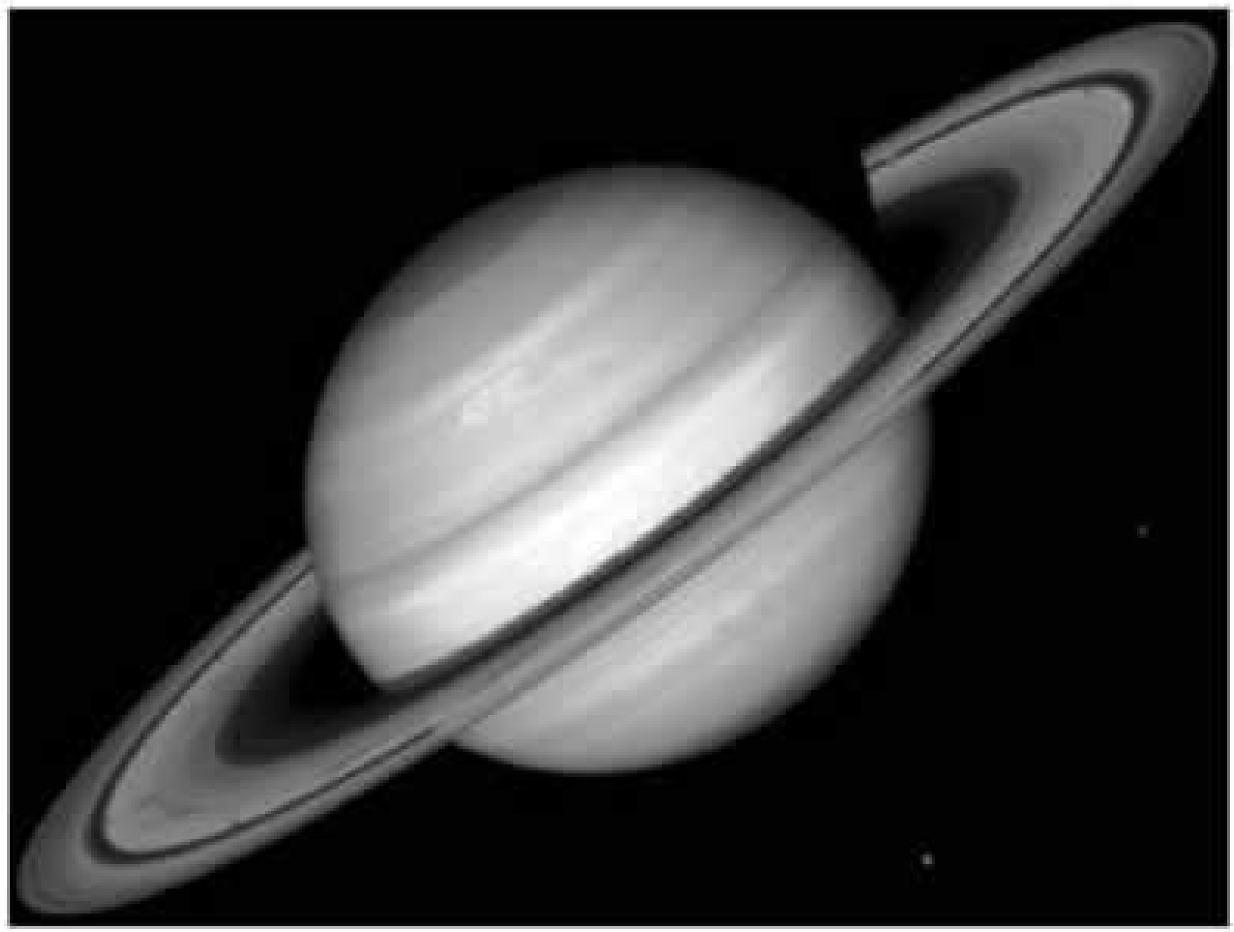
LPE hiérarchique



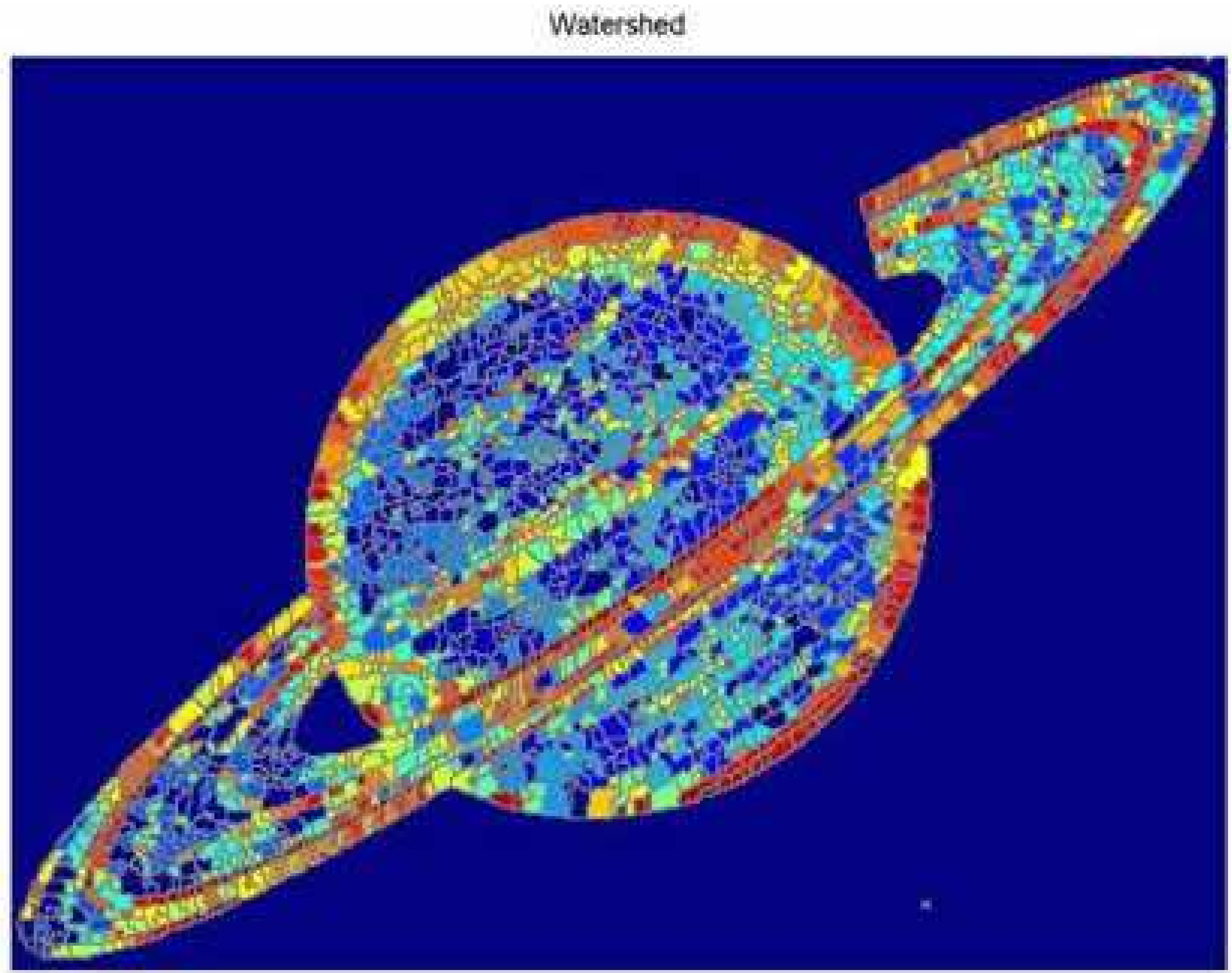
LPE hiérarchique



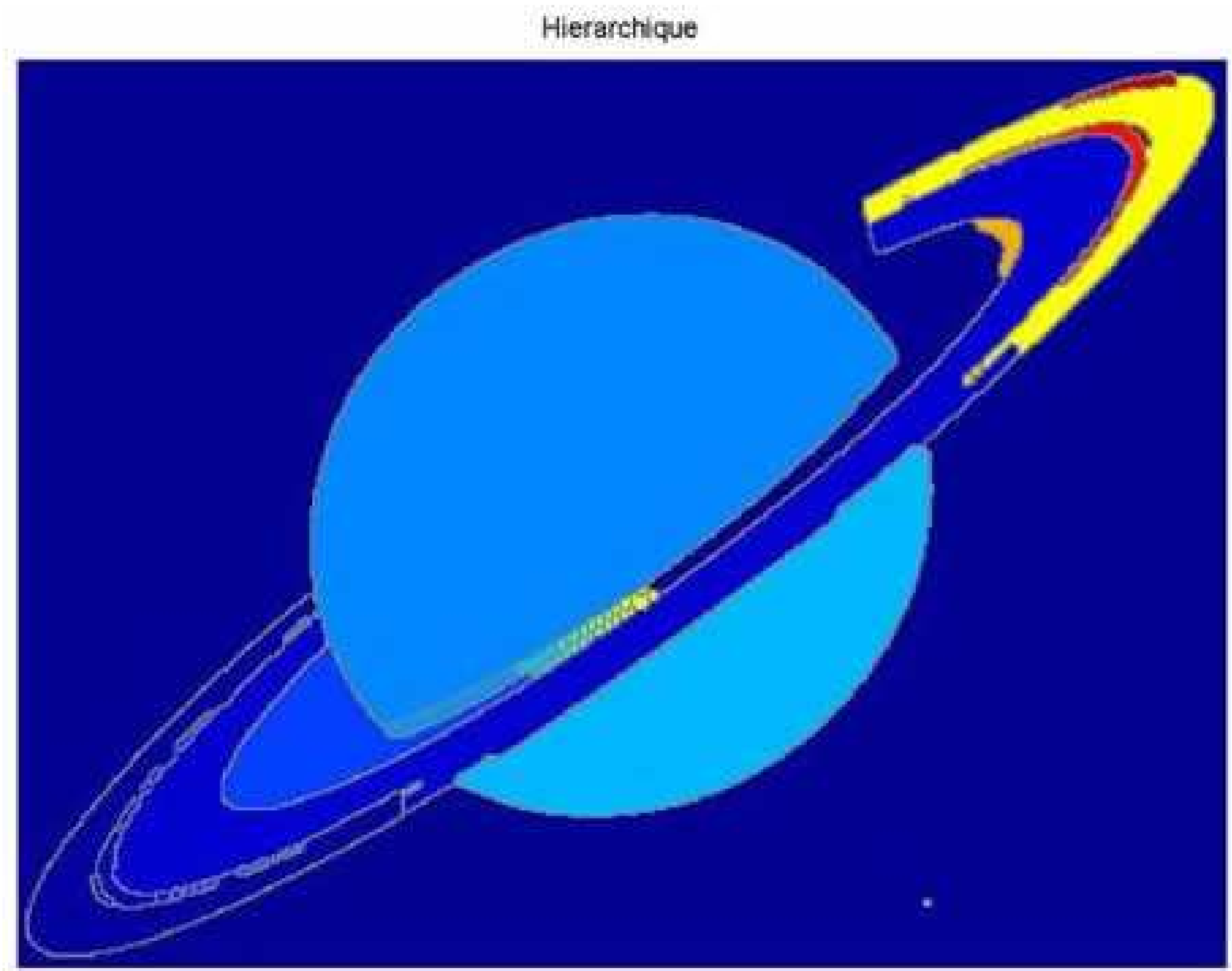
LPE hiérarchique



LPE hiérarchique



LPE hiérarchique



Transformation en tout ou rien

Elément structurant : $T = (T_1, T_2)$, avec $T_1 \cap T_2 = \emptyset$

HMT :

$$X \otimes T = E(X, T_1) \cap E(X^C, T_2)$$

Transformation en tout ou rien

Elément structurant : $T = (T_1, T_2)$, avec $T_1 \cap T_2 = \emptyset$

HMT :

$$X \otimes T = E(X, T_1) \cap E(X^C, T_2)$$

Amincissement (si $O \in T_1$) :

$$X \circ T = X \setminus X \otimes T$$

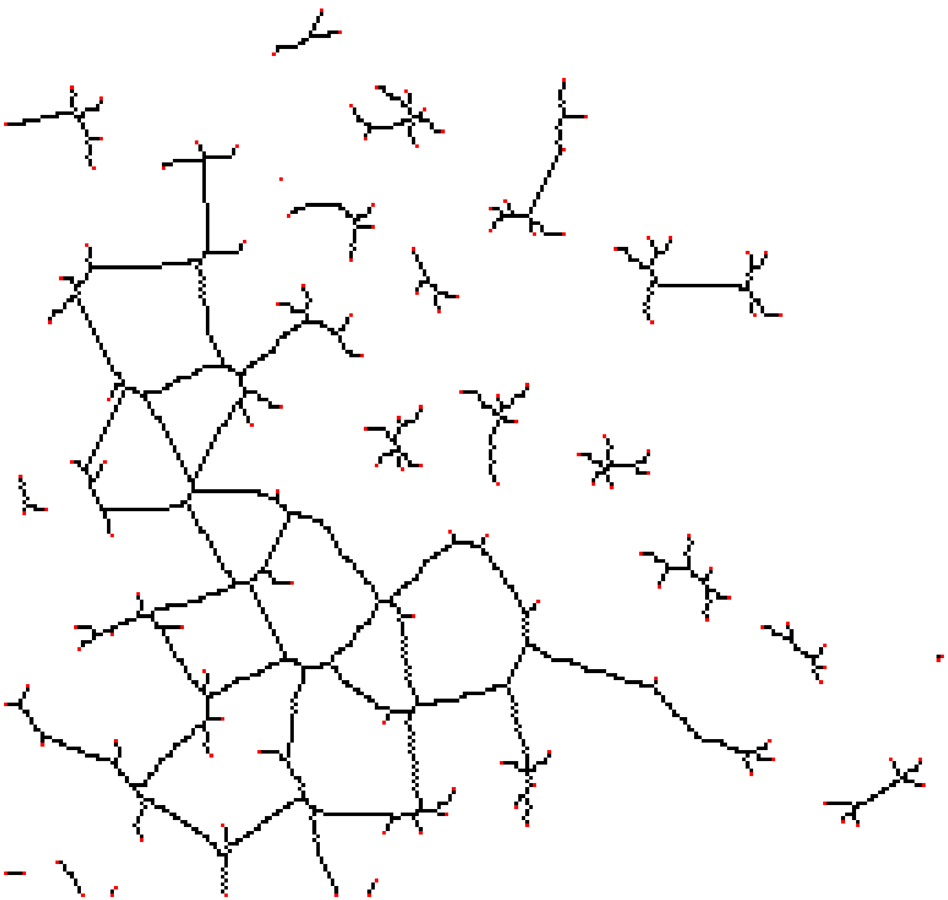
Epaississement (si $O \in T_2$) :

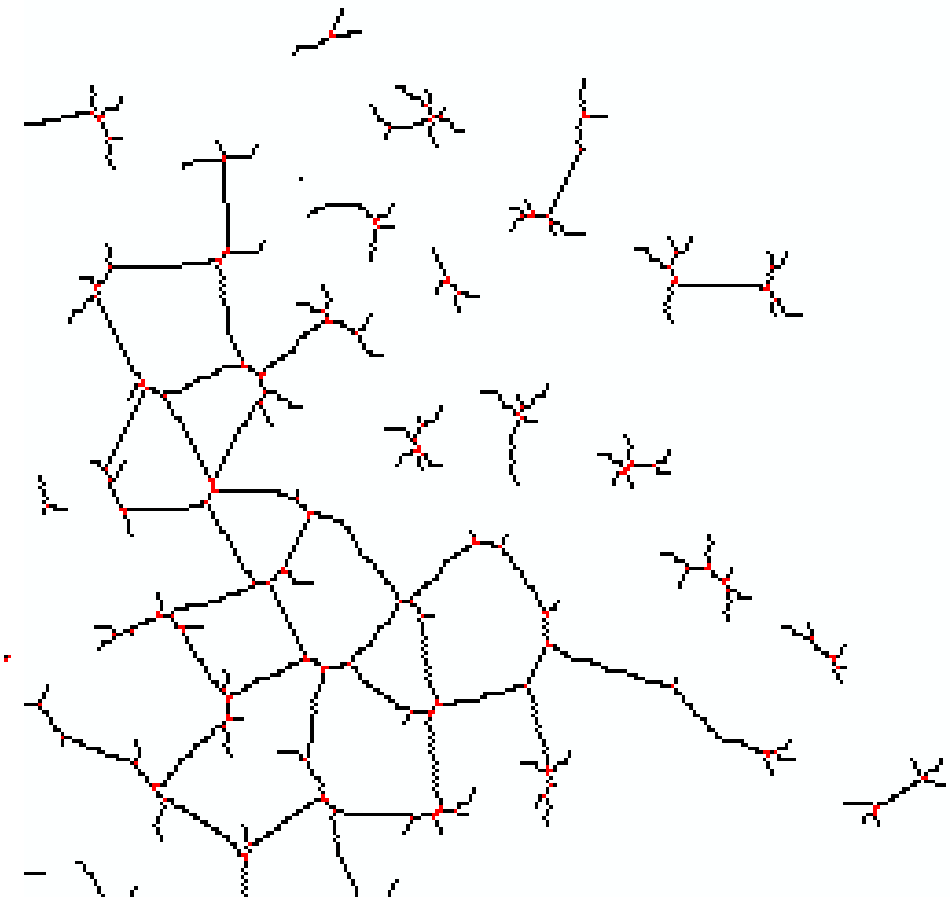
$$X \odot T = X \cup X \otimes T$$

Pour $T' = (T_2, T_1)$:

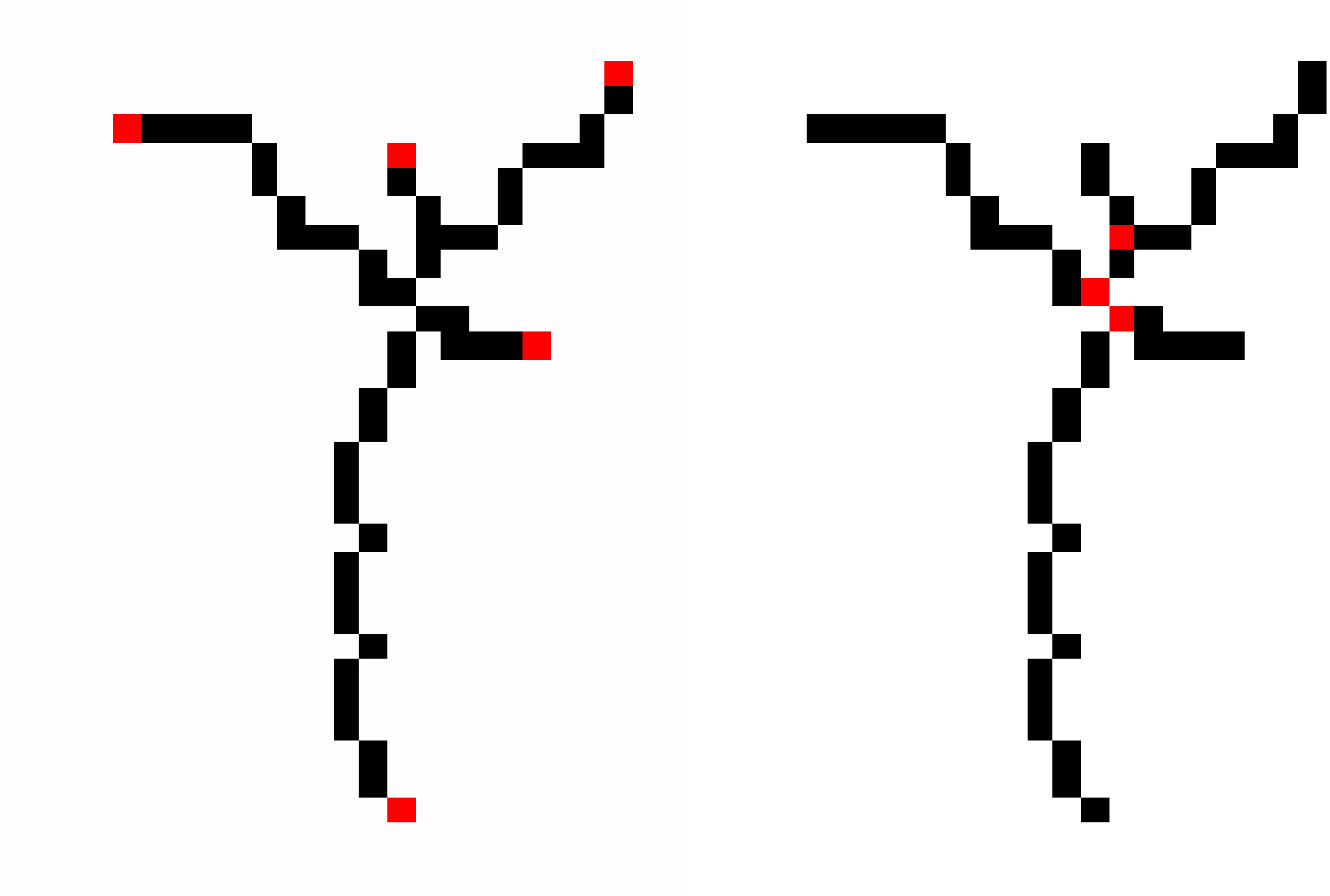
$$X \circ T = (X^C \odot T')^C$$

Transformation en tout ou rien : exemples





Transformation en tout ou rien : exemples



Squelette : exigences

- représentation compacte des objets
- lignes minces
- inclus et centré dans l'objet
- homotope à l'objet
- bonne représentation de la géométrie
- inversible (reconstruction de l'objet initial)

Squelette : cas continu

A : ensemble ouvert
$s_\rho(A)$ = ensemble des centres des boules maximales de A de rayon ρ

Squelette :

$$r(A) = \bigcup_{\rho>0} s_\rho(A)$$

Caractérisation :

$$s_\rho(A) = \bigcap_{\mu>0} [E(A, B_\rho) \setminus [E(A, B_\rho)]_{\bar{B}_\mu}]$$

$$r(A) = \bigcup_{\rho>0} \bigcap_{\mu>0} [E(A, B_\rho) \setminus [E(A, B_\rho)]_{\bar{B}_\mu}]$$

Reconstruction :

$$A = \bigcup_{\rho>0} D(s_\rho, B_\rho)$$

Propriétés du squelette continu

- $s_\rho(E_{\rho_0}(A)) = s_{\rho+\rho_0}(A) \;\Rightarrow\; r(E_{\rho_0}(A)) = \cup_{\rho>\rho_0} s_\rho(A)$
- pas de formule générale pour le squelette d'un dilaté, ouvert ou fermé
- $A \mapsto \bar{r}(A)$ est s.c.i. de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{F}$
- A connexe $\Rightarrow\; \bar{r}(A)$ connexe
- le squelette est « fin » : son intérieur est vide

Squelette : cas discret

- Transposition directe du cas continu :

$$S(X) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [E(X, B_n) \setminus E(X, B_n)_B]$$

Propriétés :

- centres de boules maximales discrètes
- reconstuction
- mais pas de bonnes propriétés de connexité

Squelette : cas discret

- Transposition directe du cas continu :

$$S(X) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [E(X, B_n) \setminus E(X, B_n)_B]$$

Propriétés :

- centres de boules maximales discrètes
- reconstuction
- mais pas de bonnes propriétés de connexité

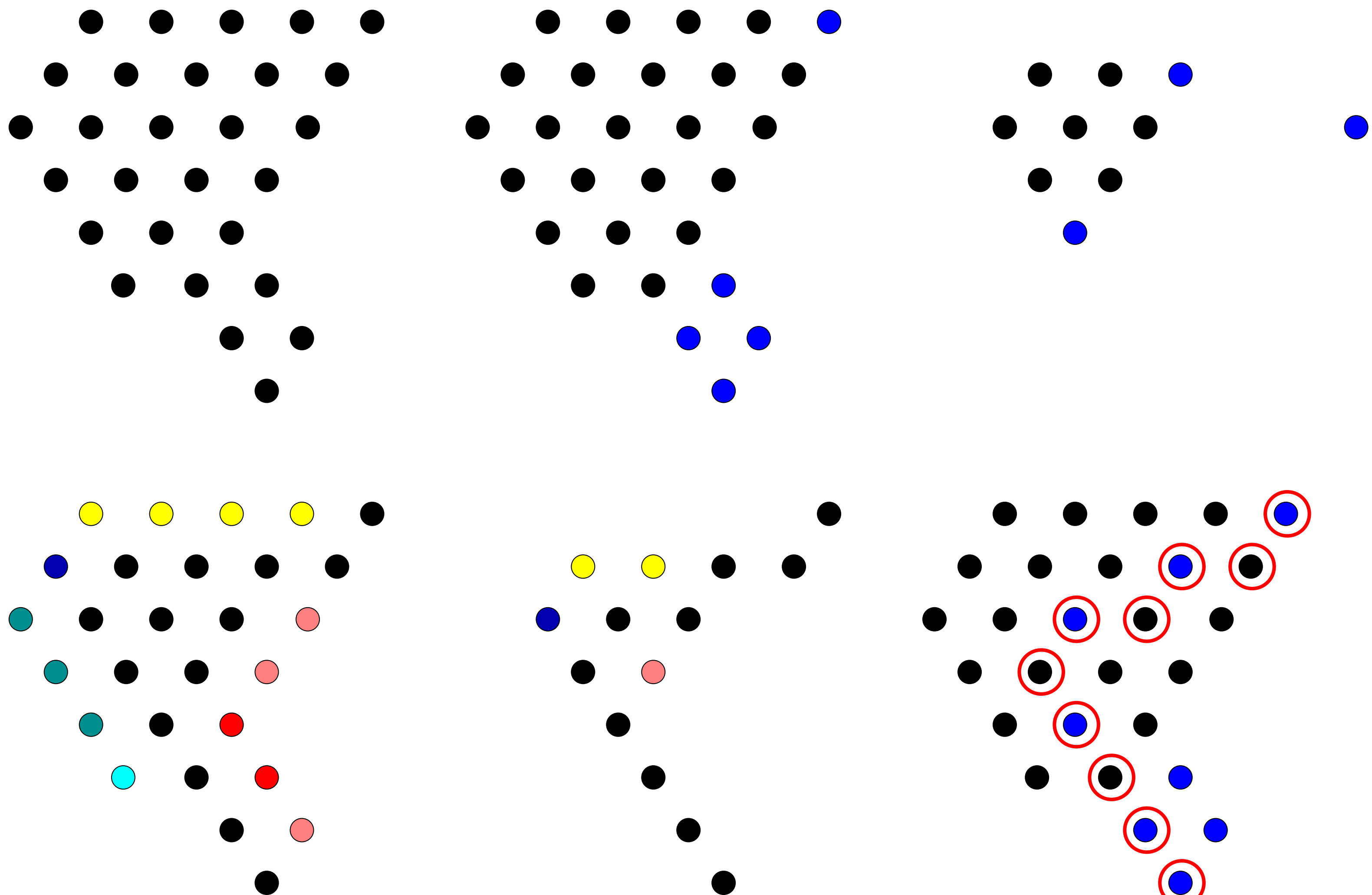
- Squelette par amincissement homotopique

$$\begin{array}{ccccc} & 1 & & 1 & \\ . & & 1 & & . \\ & 0 & & 0 & \end{array}$$

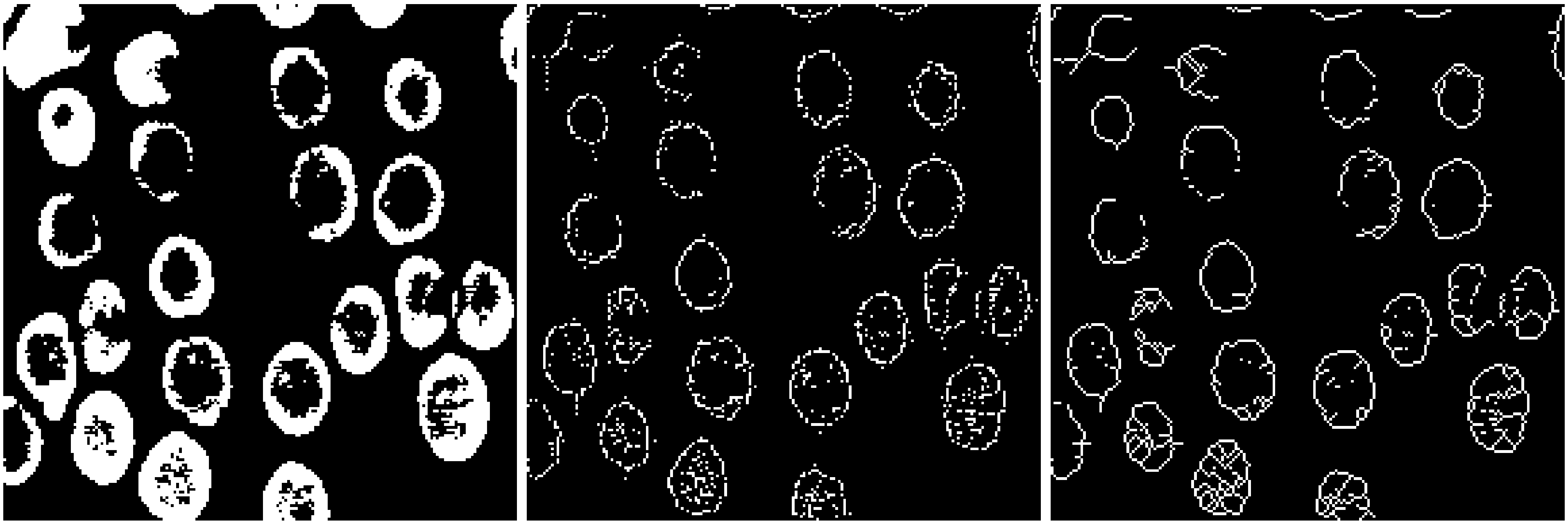
Propriétés :

- topologie parfaite
- pas de possibilité de reconstruction

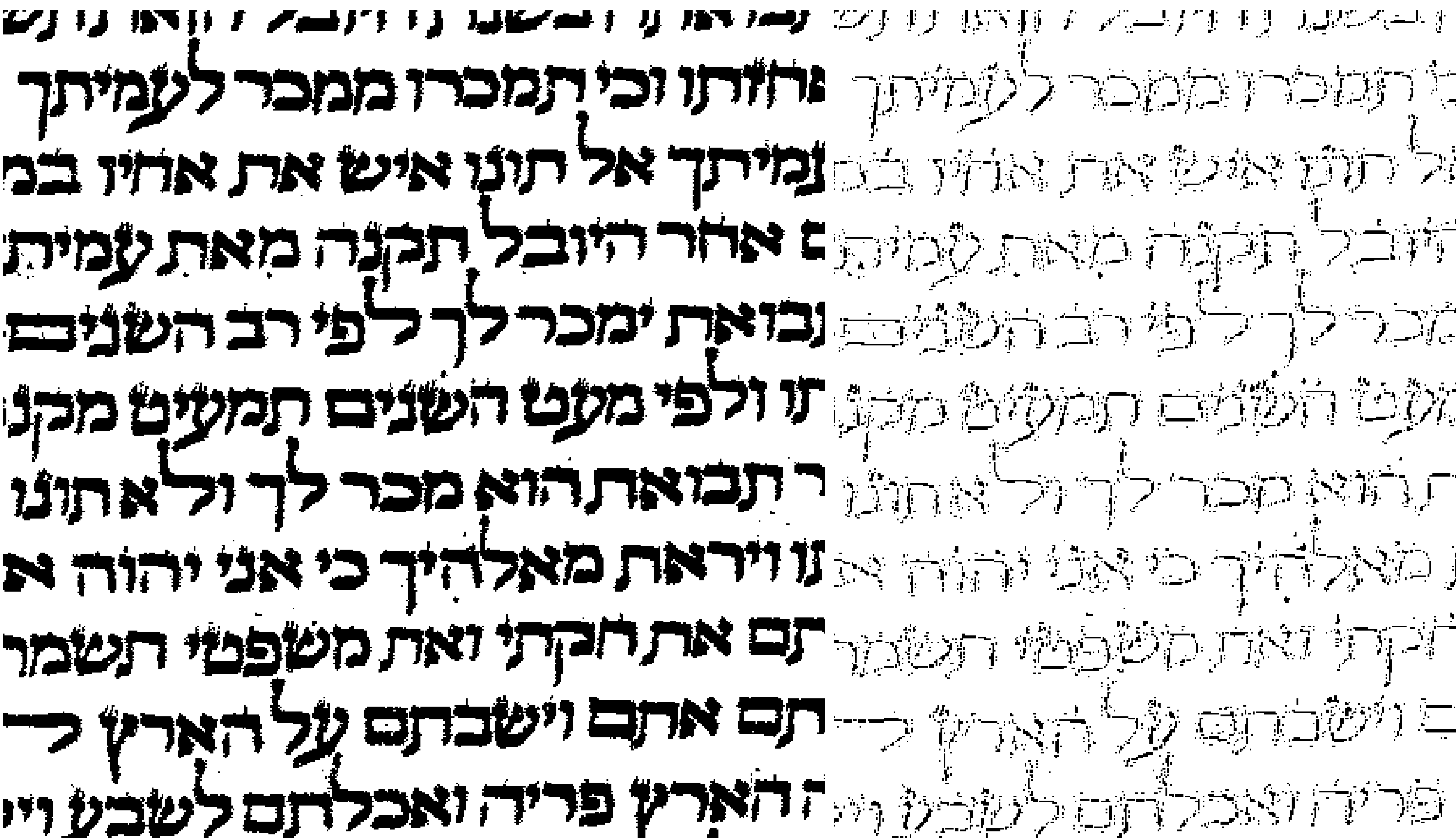
Centres des boules maximales vs amincissement



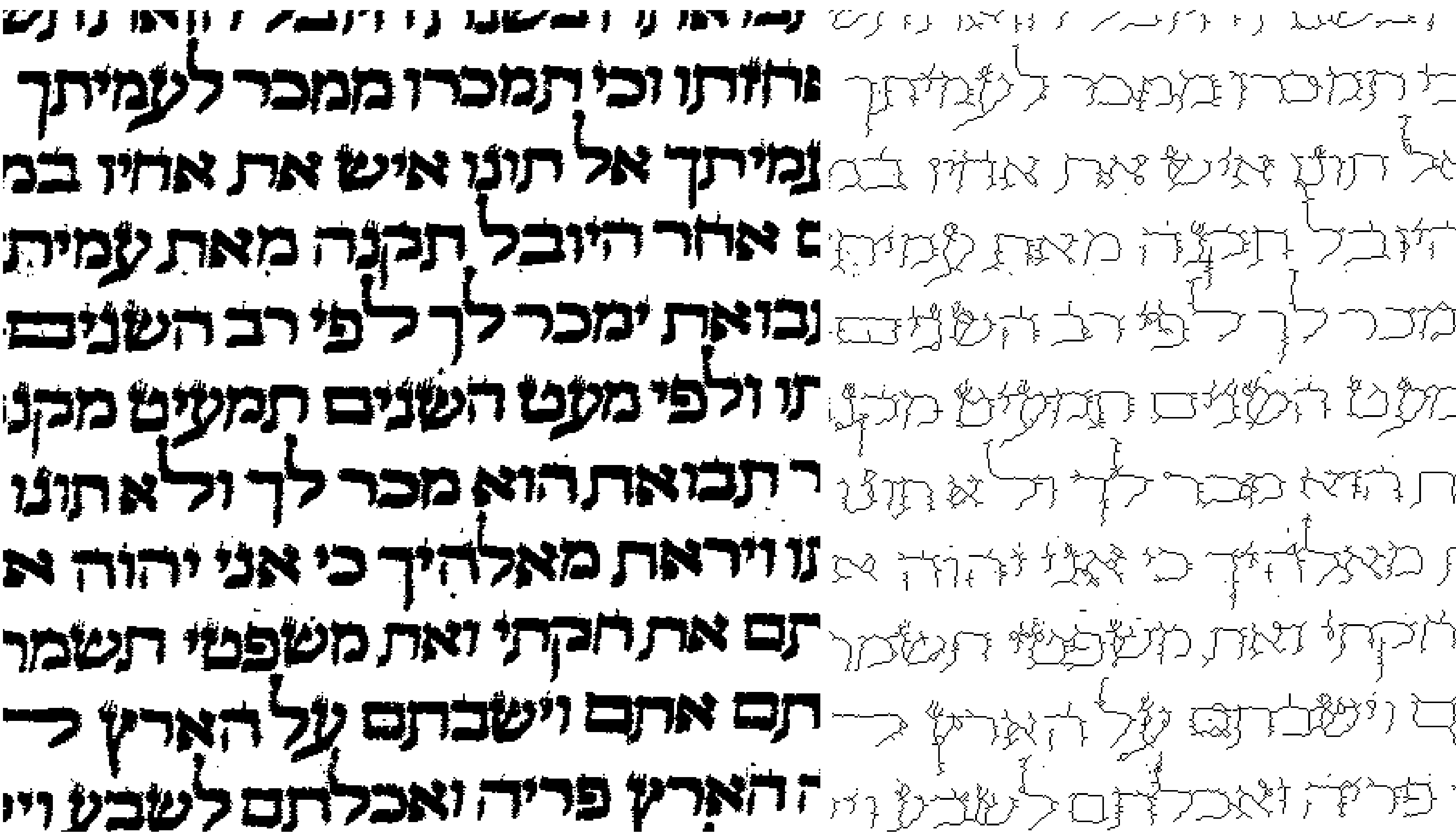
Centres des boules maximales vs amincissement



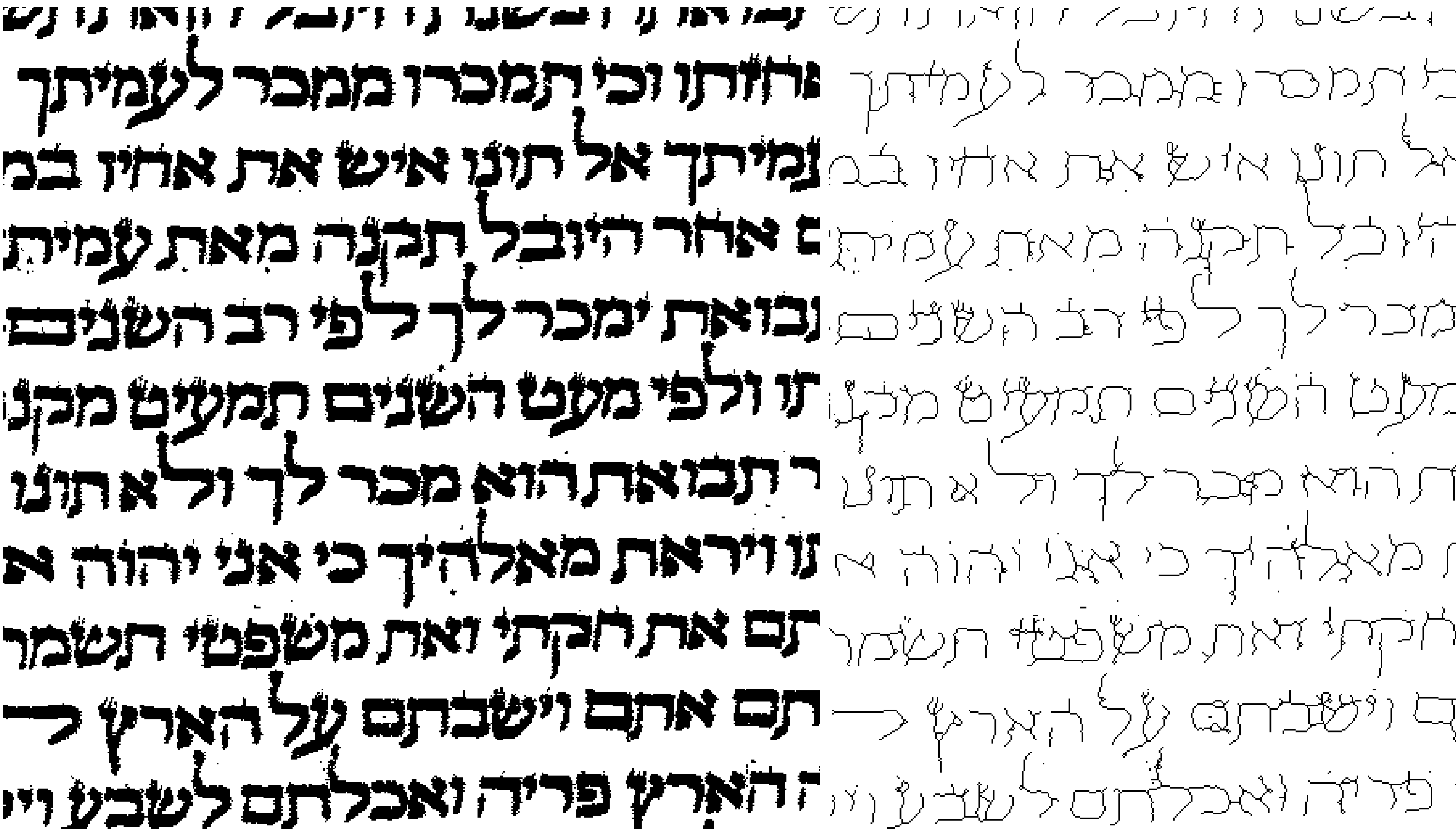
Centres des boules maximales vs amincissement



Centres des boules maximales vs amincissement

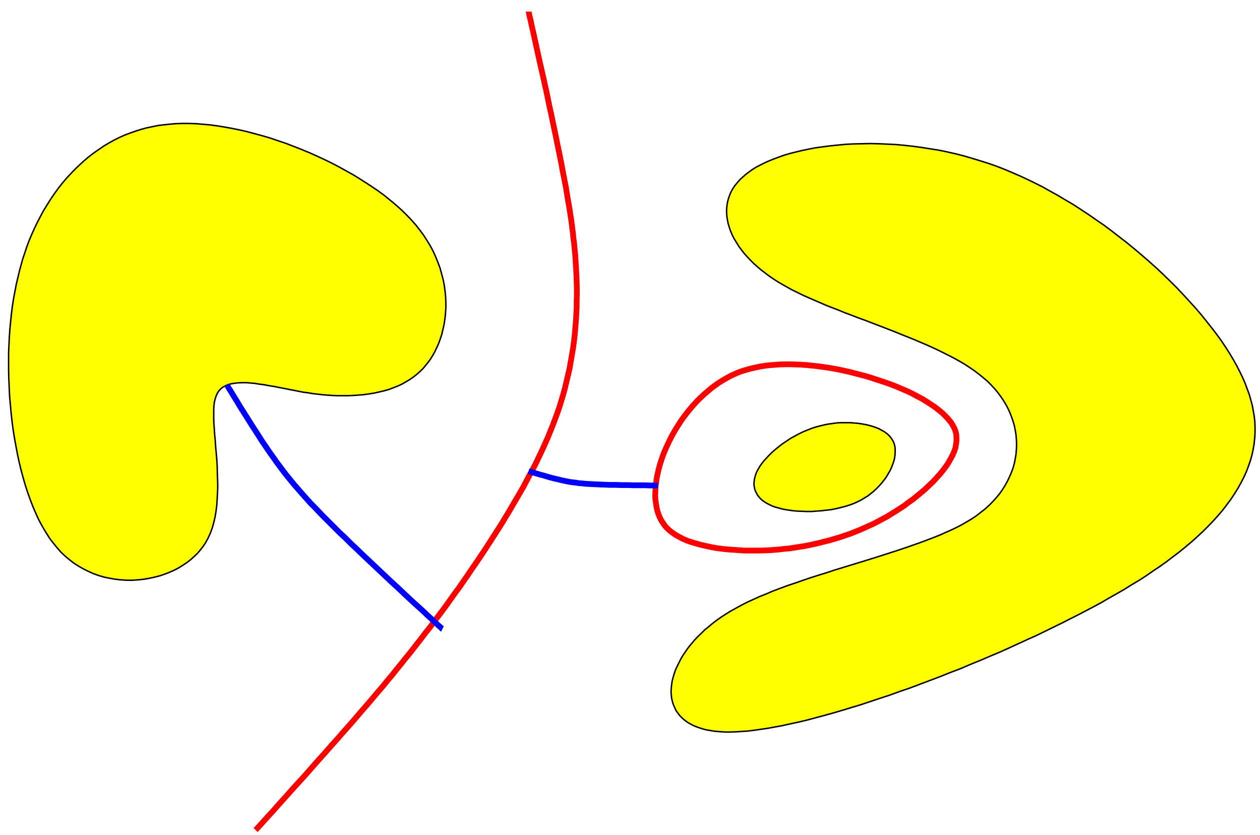


Centres des boules maximales vs amincissement



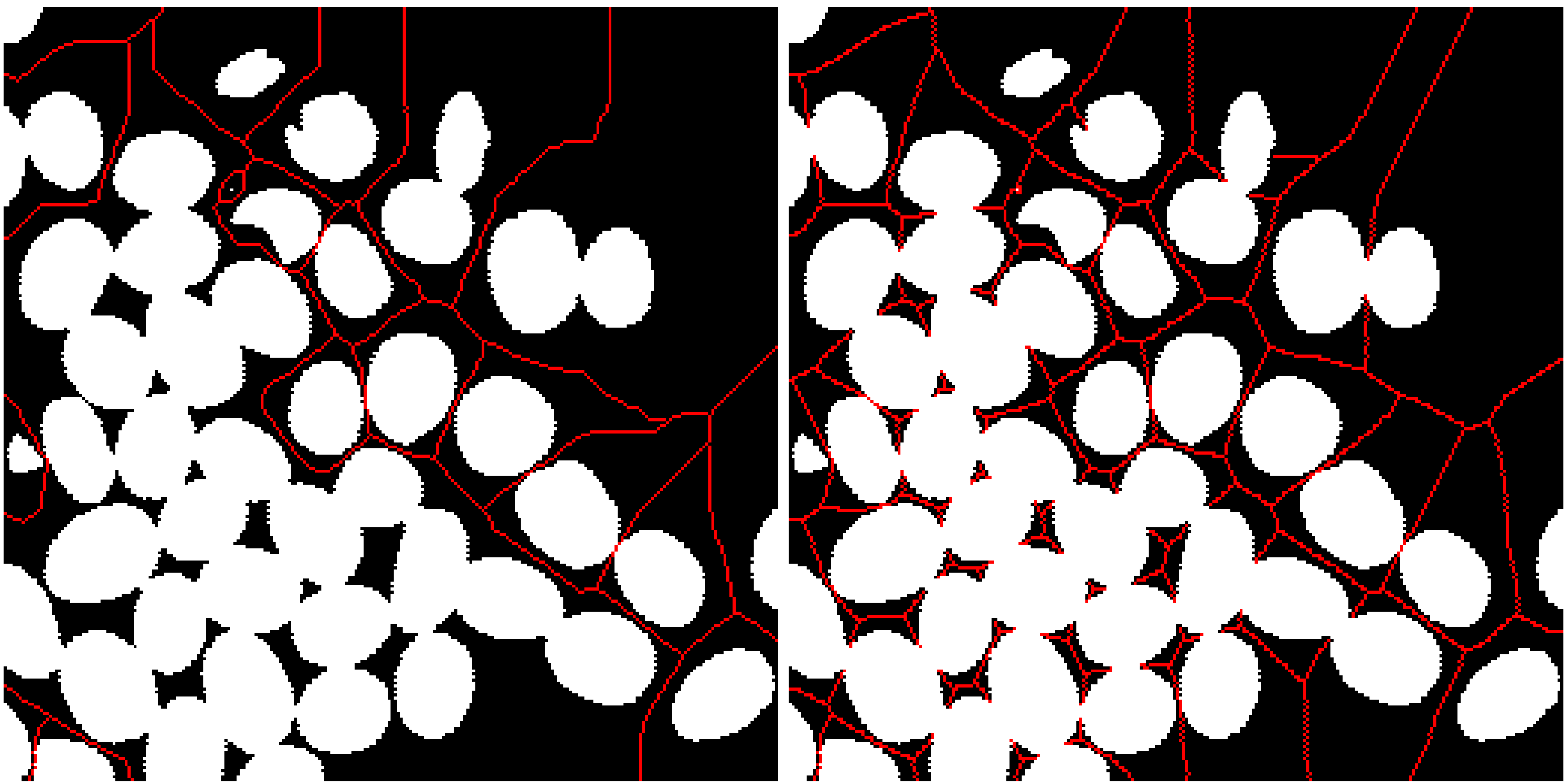
Squelette et squelette par zones d'influence

$$\text{Skiz}(X) \subseteq r(X^C)$$

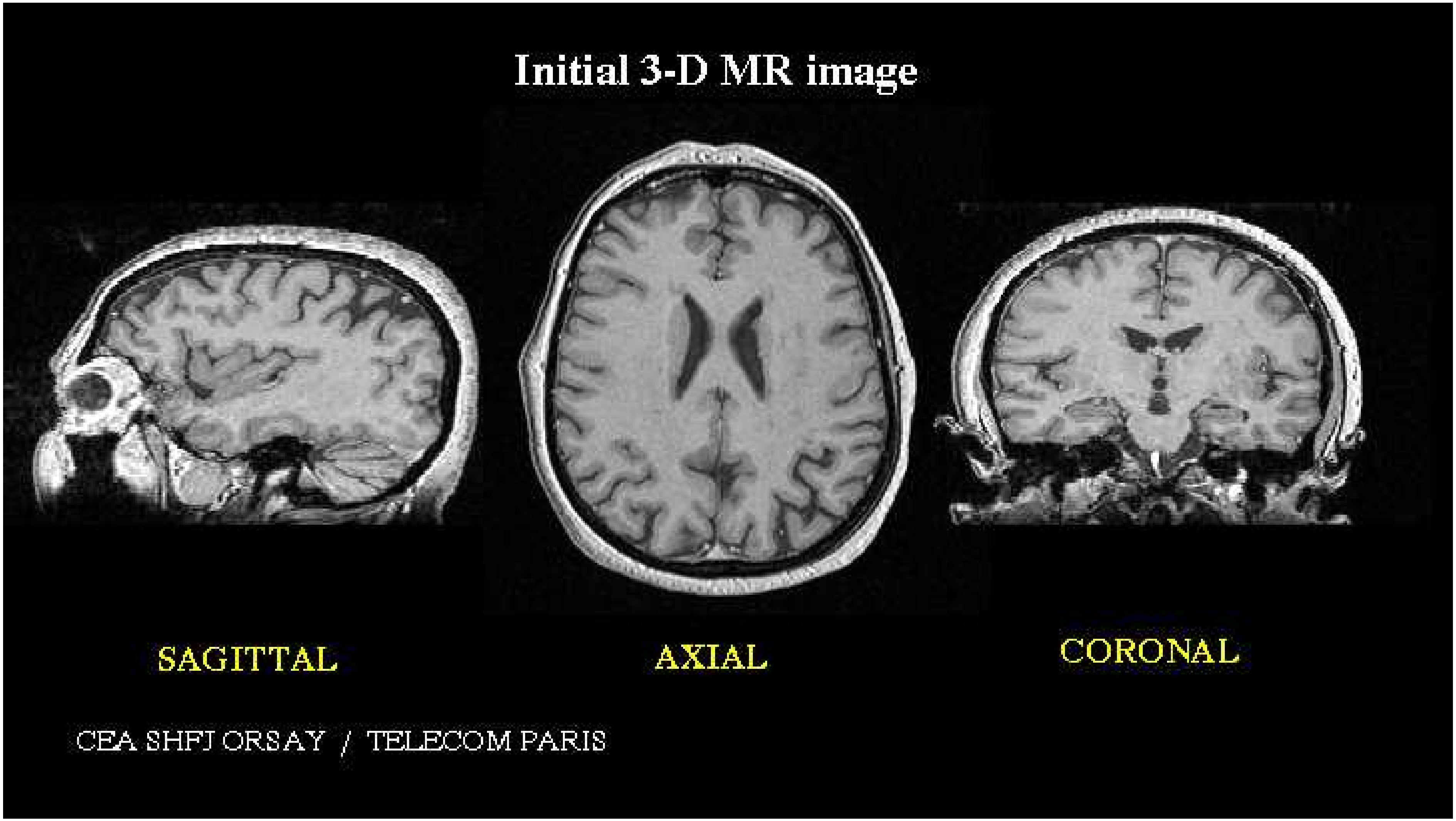


Squelette et squelette par zones d'influence

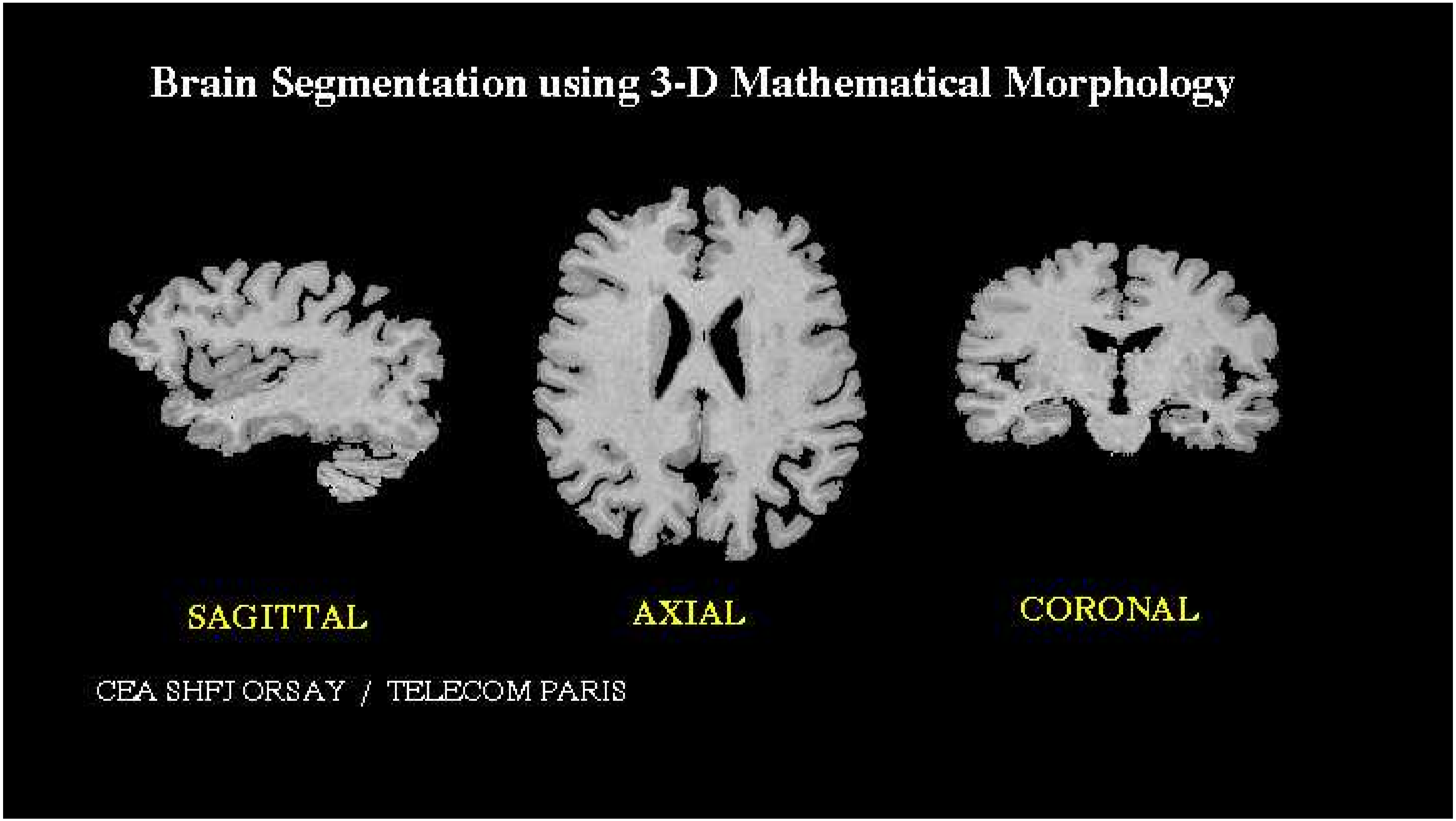
$$\text{Skiz}(X) \subseteq r(X^C)$$



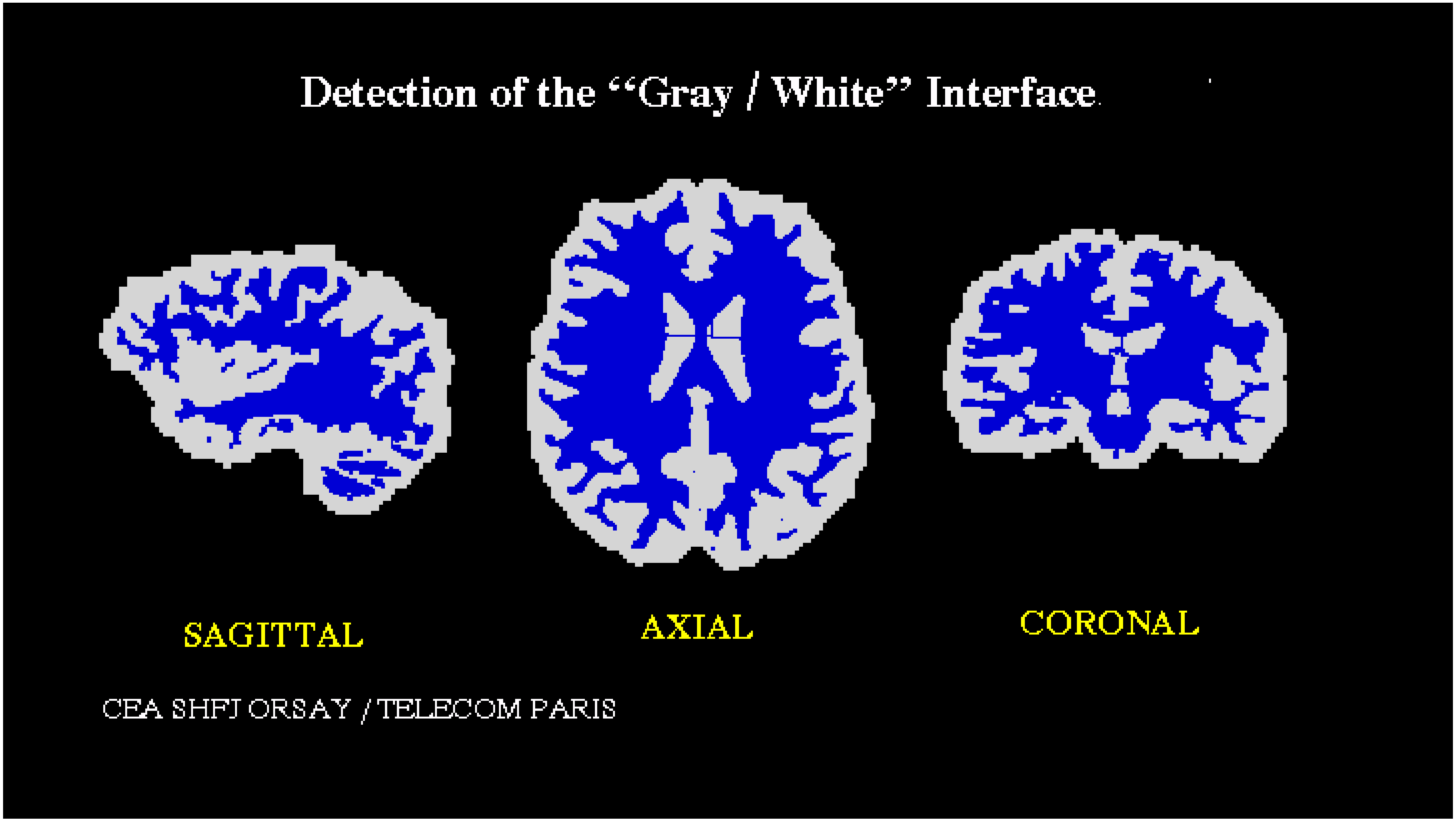
Application en imagerie cérébrale (thèse de Jean-François Mangin)



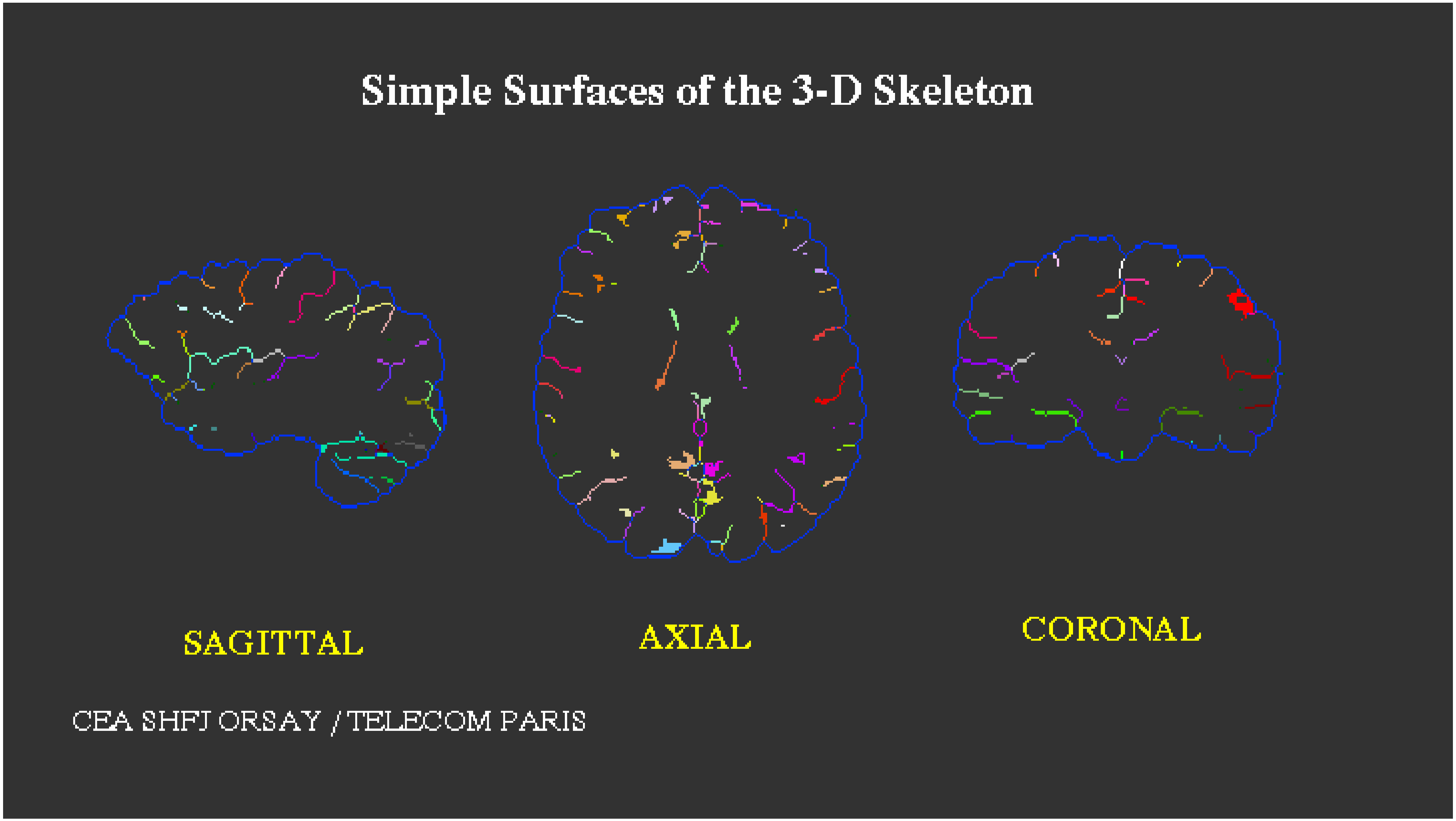
Application en imagerie cérébrale (thèse de Jean-François Mangin)



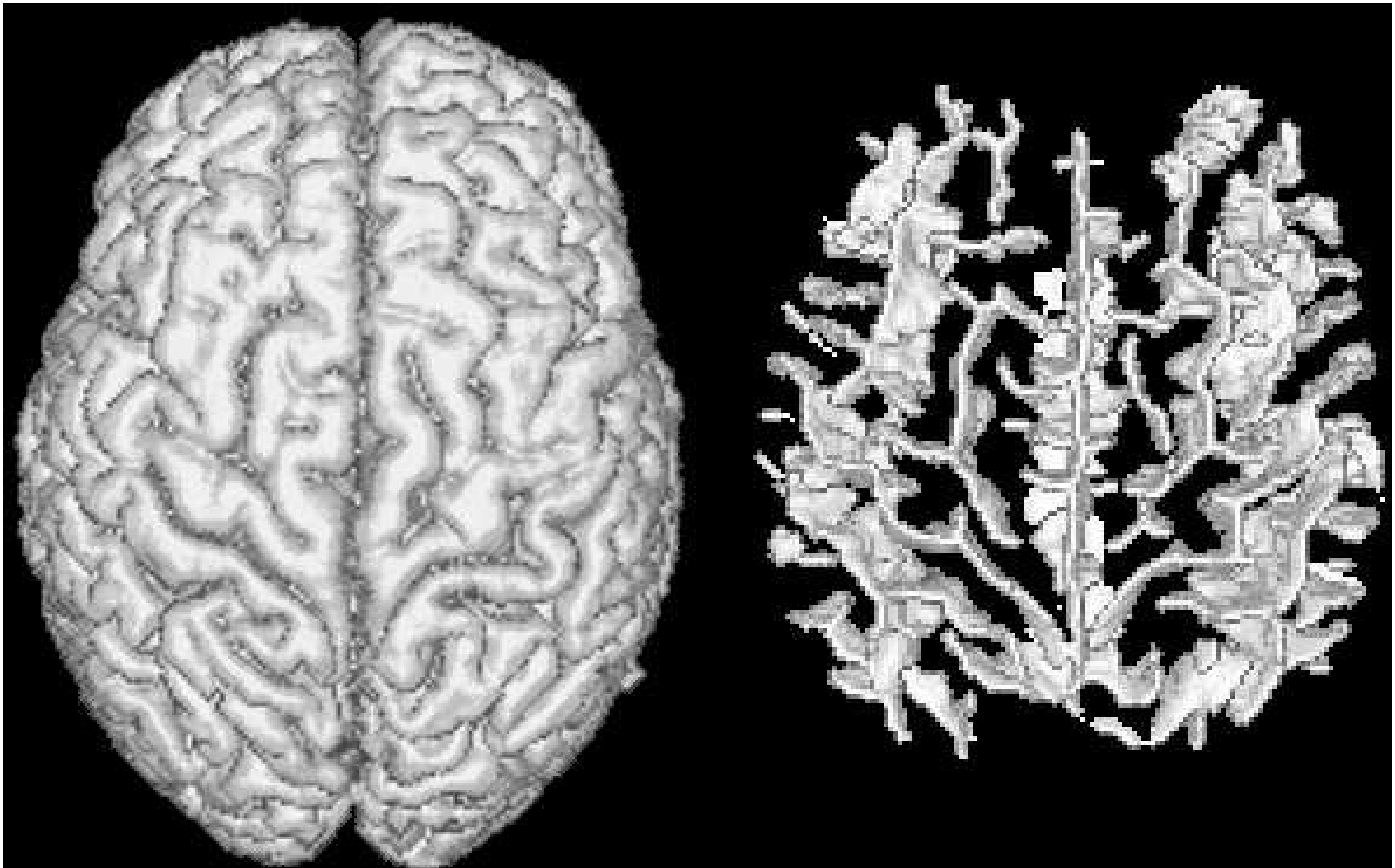
Application en imagerie cérébrale (thèse de Jean-François Mangin)



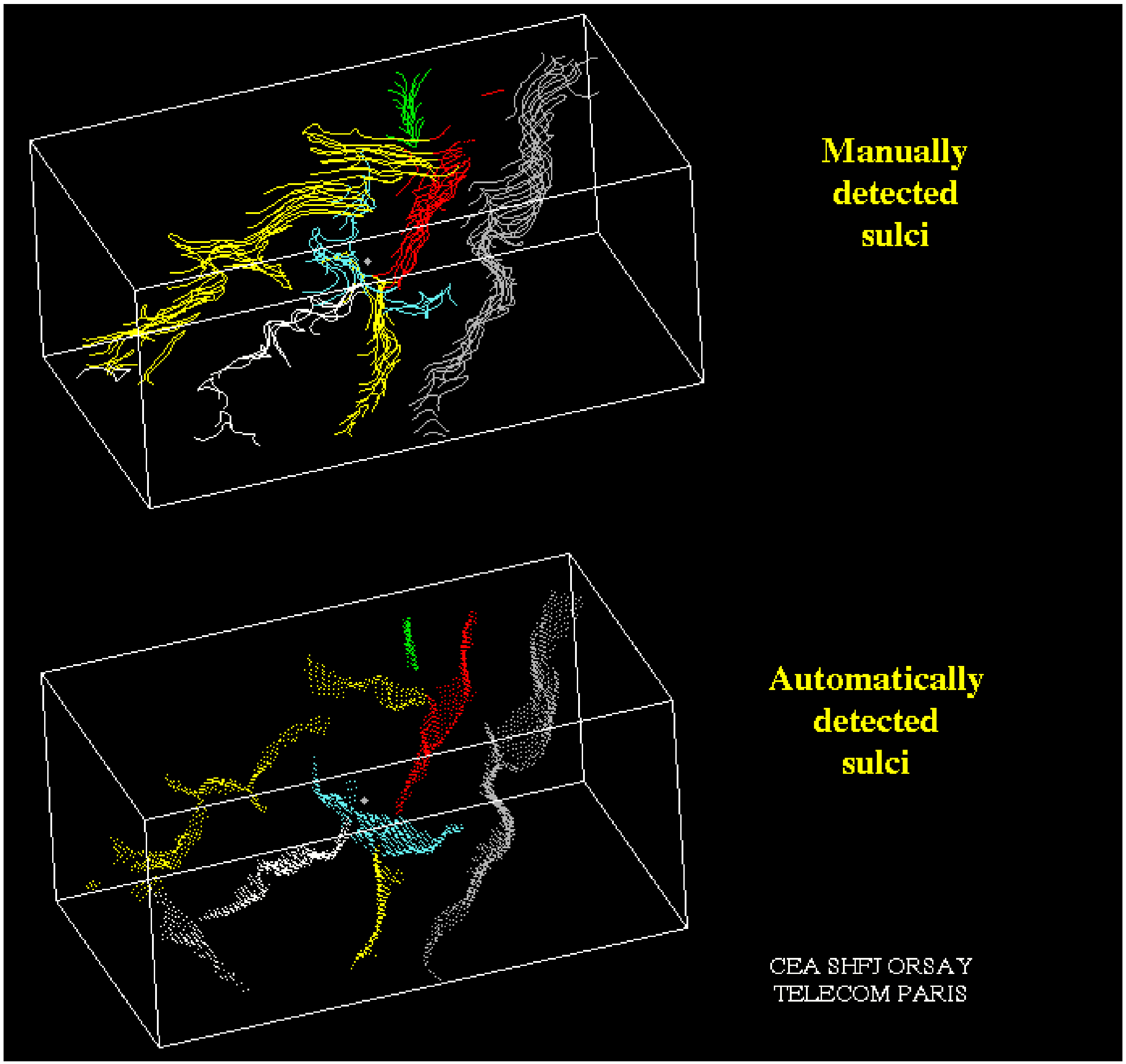
Application en imagerie cérébrale (thèse de Jean-François Mangin)



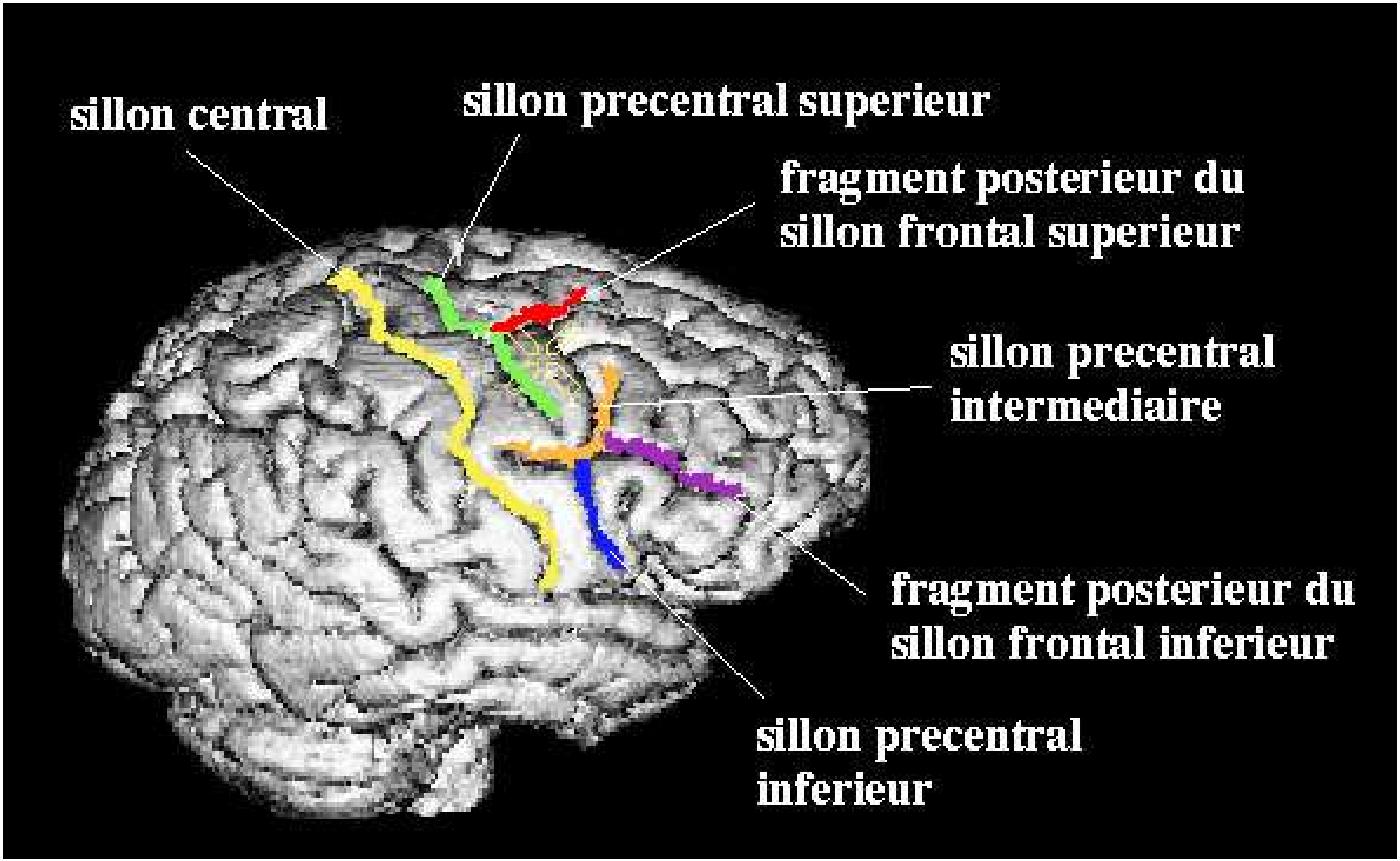
Application en imagerie cérébrale (thèse de Jean-François Mangin)



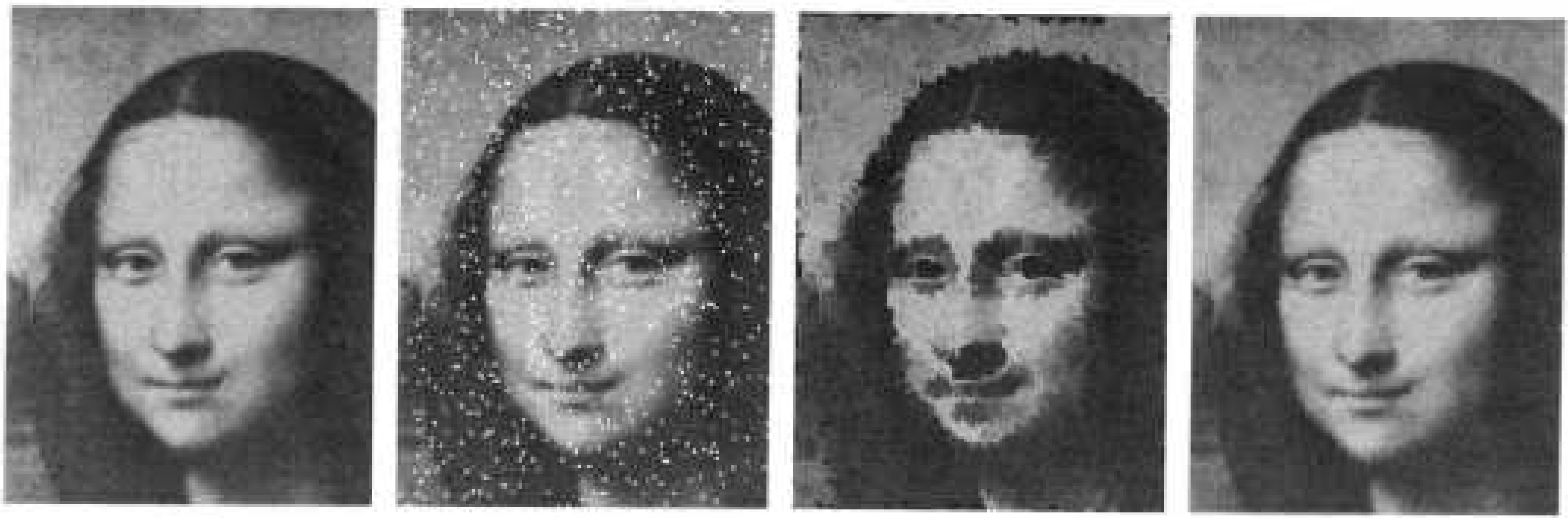
Application en imagerie cérébrale (thèse de Jean-François Mangin)



Application en imagerie cérébrale (thèse de Jean-François Mangin)



Filtrage et segmentation topologiques



(a) (b) (c) (d)

Figure 8.8. *Fltrage topologique. (a) image originale ; (b) image originale plus bruit impulsionnel ; (c) après 3 étapes d'amincissement et abaissement des pics ; (d) reconstruction homotopique de (c) contrainte par (b).*

Source : G. Bertrand, M. Couprie (2007)

Filtrage et segmentation topologiques

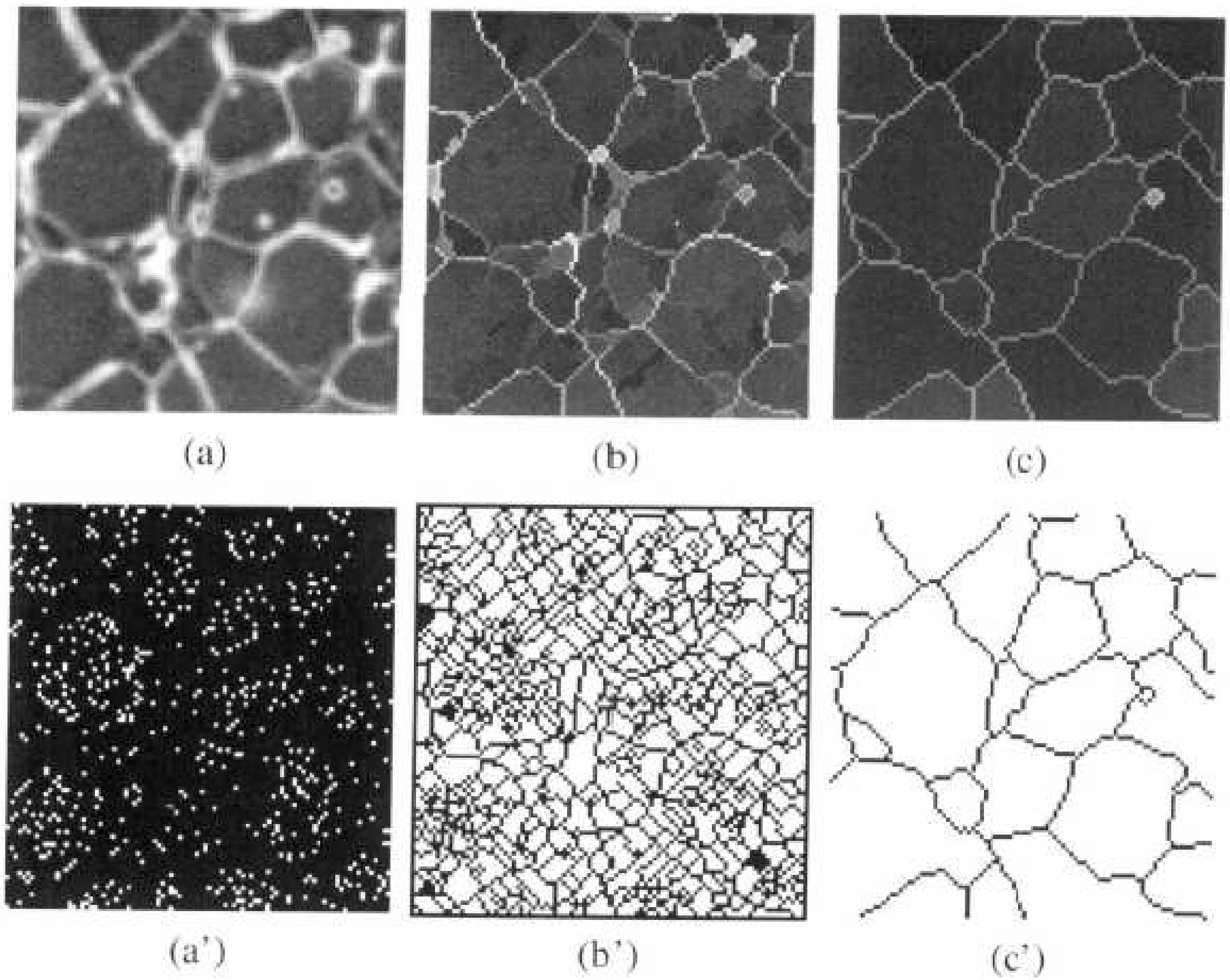
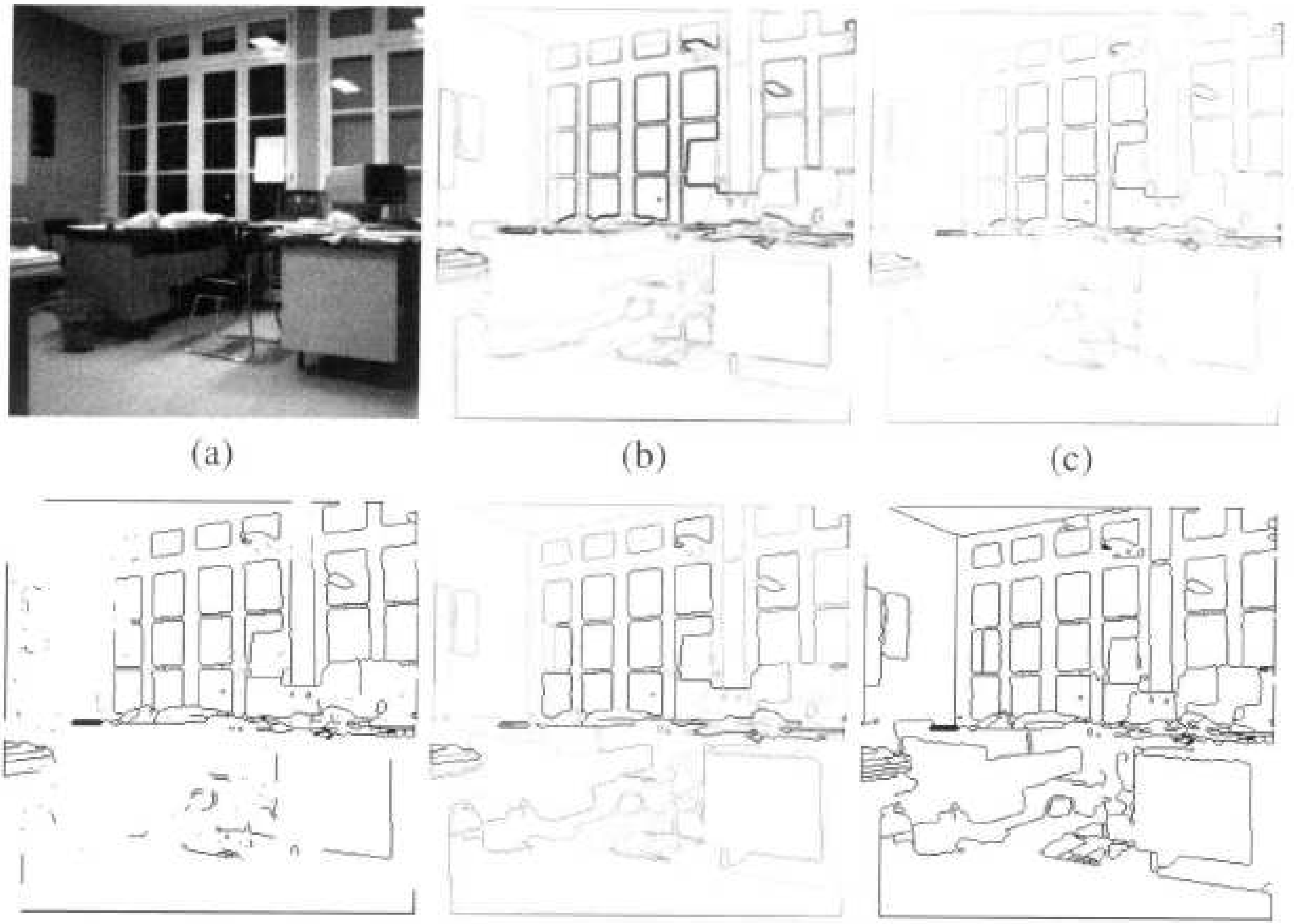


Figure 8.9. *Segmentation topologique. (a) image originale ; (b) amincissement homotopique ultime ; (c) amincissement filtré ultime avec $\lambda = 40$; (a'), (b'), (c') en blanc, les minima de (a), (b), (c) respectivement.*

Source : G. Bertrand, M. Couprie (2007)

Filtrage et segmentation topologiques



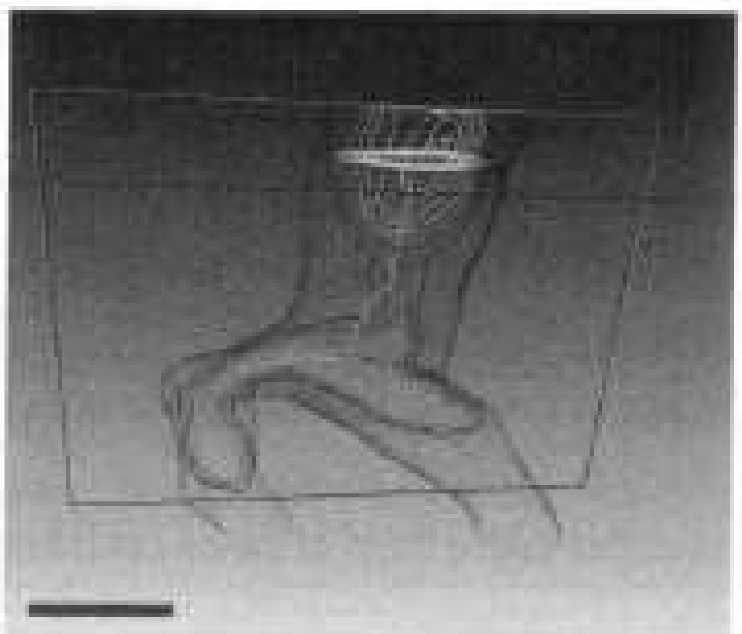
(a) (b) (c)

(d) (e) (f)

Figure 8.12. *Restauration de crêtes. (a) image originale ; (b) après un opérateur de gradient (les valeurs les plus faibles sont en blanc) ; (c) après un amincissement filtré ; (e) après restauration de crêtes jusqu'à stabilité ; (d,f) seuil de (c,e) respectivement, au même niveau.*

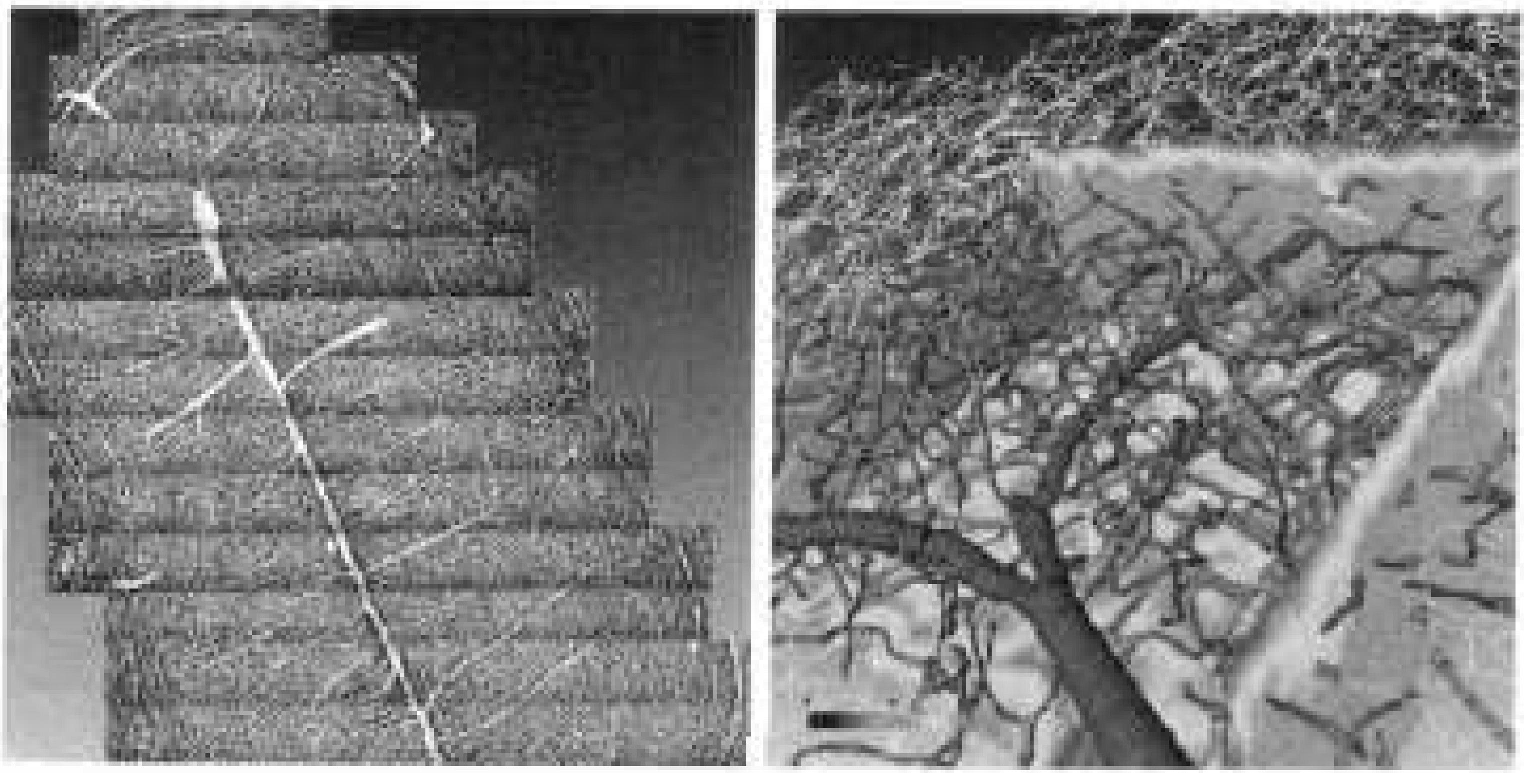
Source : G. Bertrand, M. Couprie (2007)

Application : amincissement



Source : G. Malandain (2007)

Application : amincissement



Source : G. Malandain (2007)

Fonction de propagation

$$T_X(x) = \sup_{y \in X} d_X(x, y)$$

Applications :

- extrémités : maxima régionaux de T_X ($\in Fr(X)$ si X simplement connexe)
- centre : $\min(T_X)$ (unique si X simplement connexe)
- calcul de la courbe de plus grande longueur du squelette