

# Comparaison de relations spatiales floues - Approches par transport optimal et morphologie mathématique

## Comparison of fuzzy spatial relations - Optimal transport and mathematical morphology approaches

Isabelle Bloch<sup>1</sup>

Jamal Atif<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Institut Mines-Télécom, Télécom ParisTech, CNRS LTCI, Paris - isabelle.bloch@telecom-paristech.fr

<sup>2</sup> Université Paris-Dauphine, LAMSADE, Paris - atif@lamsade.dauphine.fr \*

### Résumé :

L'observation de l'évolution d'une pathologie par imagerie médicale ou de l'occupation des sols par télédétection, la détection de changements dans des séquences vidéo, ou encore la mise à jour de systèmes d'information spatiale sont autant d'exemples qui peuvent bénéficier de la quantification et de la comparaison de relations spatiales entre les objets qui composent les scènes observées. Dans cet article, nous proposons deux approches pour comparer des relations spatiales représentées par des ensembles flous, l'une par transport optimal et l'autre par morphologie mathématique. Des exemples sur des séquences vidéo synthétiques illustrent l'intérêt de ces approches.

### Mots-clés :

Relations spatiales floues, comparaison de relations spatiales, comparaison de distributions, transport optimal, morphologie mathématique, distances de Wasserstein, de Hausdorff, de Prokhorov-Lévy.

### Abstract:

Observing the evolution of a pathology in medical images, or of soil occupation in remote sensing, detecting changes in video sequences, updating a spatial information system are examples that can all benefit from quantification and comparison of spatial relations between objects in the observed scenes. In this paper, we propose two approaches to compare spatial relations represented as fuzzy sets, relying on optimal transport and mathematical morphology, respectively. Examples on synthetic video sequences illustrate the interest of these approaches.

### Keywords:

Fuzzy spatial relations, comparison of spatial relations, comparison of distributions, optimal transport, mathematical morphology, Wasserstein, Hausdorff, Prokhorov-Lévy distances.

## 1 Introduction

L'interprétation de scènes s'appuie de plus en plus souvent sur des informations structurelles, en particulier sur les relations spatiales entre les objets qui composent la scène. L'importance et l'intérêt de telles informations ont été montrés dans de nombreux travaux

et de nombreuses applications (par exemple [1, 8, 11, 14, 13, 16, 18, 20, 21, 25, 27, 36]). Les relations spatiales, qu'elles soient mesurées dans une image ou issues d'une base de connaissances, sont souvent exprimées de manière imprécise, ce qui conduit à les représenter de manière floue [3]. Lorsque la configuration spatiale des scènes évolue, la quantification et l'interprétation de ces évolutions nécessite la comparaison des relations spatiales. De même, la reconnaissance d'objets dans des images à partir de connaissances a priori sur ces objets peut bénéficier de la comparaison des relations entre les observations de ces objets et des relations entre leurs représentations dans un modèle. C'est à cette question, encore peu abordée dans la littérature<sup>1</sup>, que nous répondons dans cet article, avec de premières propositions.

Nous cherchons en particulier à définir des mesures de comparaison qui permettent de répondre aux questions suivantes, en supposant que nous nous intéressons à un ensemble défini de relations spatiales qu'il est possible de calculer : deux objets  $A$  et  $B$ , connus dans un modèle comme partageant certaines relations, partagent-ils les mêmes relations dans leurs observations (dans des images par exemple) ? deux objets  $A'$  et  $B'$  peuvent-ils être reconnus comme  $A$  et  $B$  à l'aide de leurs relations spatiales ? comment les relations entre  $A$  et  $B$  évoluent-elles d'une date  $t$  à une date  $t'$  ? les relations entre  $A$  à la date  $t$  et  $A$  à la date  $t'$  sont-elles similaires aux relations entre  $B$  à la date  $t$  et  $B$  à la date  $t'$  ? ( $A$  et  $B$  étant des observations, ou des modèles d'objet, ou encore une observation et un modèle). Des questions similaires peuvent être exprimées pour des relations entre plus de deux objets.

Nous considérons ici des relations spatiales représentées par des distributions ou des nombres flous, en prenant l'exemple de relations de direction et distance. Leurs définitions sont rappelées dans la section 2. S'il existe de nombreuses mesures de comparaison de distributions de probabilités, la plupart n'est pas adaptée à notre propos.

\*Ce travail a été réalisé lorsque J. Atif était à l'Université Paris Sud, LRI, TAO, Orsay

1. à part dans les approches par mise en correspondance de graphes, mais dans lesquelles les relations spatiales sont représentées par de simples nombres, constituant les attributs des arêtes

Nous proposons donc deux nouvelles approches dans la section 3, l'une adaptant des mesures existantes à partir de transport optimal (section 3.1), et l'autre reposant sur des dilatations morphologiques (section 3.2). Nous en donnons quelques propriétés. Pour illustrer l'effet et l'intérêt des mesures de comparaison, nous montrons les résultats obtenus sur des séquences vidéo synthétiques dans la section 4. Les deux approches proposées ont une parenté qui s'exprime à partir des distances de Prokhorov-Lévy et de Wasserstein.

## 2 Représentations floues de relations spatiales

Le cadre semi-quantitatif des ensembles flous est bien adapté pour représenter des relations spatiales, qu'elles soient calculées entre objets définis de manière imprécise, ou qu'elles soient elles-mêmes de nature imprécise (*proche, à droite...*) [3]. Etant donnés deux objets<sup>2</sup>, une relation spatiale entre ces objets peut être évaluée et représentée sous différentes formes, comme un nombre, un intervalle, un nombre flou ou une distribution, un ensemble flou bipolaire, etc. Ici, nous considérons le cas où les relations spatiales sont représentées par des nombres flous ou des distributions, avec deux exemples : les relations directionnelles représentées comme une fonction périodique par un histogramme d'angles sur l'intervalle  $[0, 2\pi]$  et les relations de distance représentées par un histogramme ou un nombre flou sur  $\mathbb{R}^+$ .

Rappelons les définitions de ces deux relations. Nous notons  $\mathcal{S}$  l'espace dans lequel sont définis les objets (par exemple  $\mathbb{R}^n$  ou  $\mathbb{Z}^n$ ). Les histogrammes d'angles ont été introduits dans [24] et généralisés dans [6]. Nous ne donnons ici que la définition en 2D. L'histogramme d'angles normalisé  $ha_{A,B}$  entre deux objets  $A$  et  $B$  est défini par  $\forall \theta \in [0, 2\pi], ha_{A,B}(\theta) = \frac{h'_{A,B}(\theta)}{\sup_{\theta' \in [0, 2\pi]} h'_{A,B}(\theta')}$ , avec  $h'_{A,B}(\theta) = |\{(a, b), a \in A, b \in B \mid \angle(a, b) = \theta\}|$  et  $\angle(a, b)$  l'angle modulo  $2\pi$  entre  $\vec{ab}$  et l'axe horizontal. Lorsque  $A$  et  $B$  sont flous, la somme est pondérée par les degrés d'appartenance de  $a$  à  $A$  et de  $b$  à  $B$ . Elle peut également être pondérée par une fonction de la distance entre  $a$  et  $b$  comme dans les histogrammes de force [22].

Dans le cas des distances, nous pouvons définir de la même manière un histogramme de distances par  $\forall \lambda \in \mathbb{R}^+, hd_{A,B}(\lambda) = \frac{1}{D} |\{(a, b), a \in A, b \in B \mid d_{\mathcal{S}}(a, b) = \lambda\}|$ , où  $d_{\mathcal{S}}$  est la distance sur  $\mathcal{S}$  et  $D$  un facteur de normalisation. Nous utiliserons également des distances représentées par des nombres flous, exprimant le degré avec lequel la distance minimum ou de Hausdorff entre deux objets flous  $A$  et  $B$  est égal à  $\lambda$ , que nous notons  $d_{A,B}^{\min}(\lambda)$  et  $d_{A,B}^{Haus}(\lambda)$ . Des définitions morphologiques

2. nous ne faisons pas d'hypothèse ici sur la manière dont les objets sont représentés, et ils peuvent être des ensembles, des ensembles flous, des points d'intérêt...

ont été proposées pour cela dans [2] (voir section 3.2).

Afin de manipuler des valeurs dans  $[0, 1]$  (par convention), nous normalisons les distributions et histogrammes. Cette normalisation peut être faite par le sup ou le max (comme dans la définition de  $ha$  ci-dessus), ou par la somme. Le premier cas correspond à une interprétation floue ou possibiliste qui sera utile pour les définitions morphologiques ou pour comparer les relations à des valeurs de variables linguistiques. Le second cas correspond à une interprétation probabiliste qui permettra d'adapter des méthodes de comparaison de distributions de probabilités. Nous proposerons également une extension ne nécessitant pas de normalisation par la somme.

## 3 Comparaison de relations spatiales floues

La comparaison de relations spatiales floues peut être envisagée de manière qualitative (par exemple : une relation est-elle mieux satisfaite qu'une autre ?), ou de manière quantitative. Ici nous proposons des mesures quantitatives de comparaison, dans le cas où les relations sont représentées par des histogrammes ou des distributions, comme dans la section 2. Soit  $f$  et  $g$  les représentations à comparer. Dans les deux exemples considérés, ce sont des fonctions de  $[0, 2\pi]$  vers  $[0, 1]$  ou de  $\mathbb{R}^+$  vers  $[0, 1]$ . Nous noterons  $M$  le domaine de définition de la fonction,  $x, y, \dots$  des points de  $M$ , ou  $\theta, \alpha, \dots$  lorsqu'il s'agit d'angles.

Les méthodes de comparaison d'histogrammes ou de distributions de probabilités [12] sont classiquement divisées en deux classes : celles qui font une comparaison « verticale » (appelées *bin-to-bin*), et celles qui prennent aussi en compte la distance sur le support  $M$ , ou distance de base (appelées *cross-bins*) [12, 29, 30, 32, 34, 39]. De même que pour le calcul de distances floues dans le domaine spatial [2], les mesures prenant en compte la distance sur  $M$  sont mieux appropriées ici. Par exemple si deux distributions sont identiques à une translation près et de supports disjoints, seules les mesures prenant en compte la distance sur  $M$  pourront différencier les situations où cette translation varie.

La distance sur  $M$ , notée  $d$ , est définie de manière différente suivant la nature de  $M$ . Si le domaine de définition de la distribution est  $\mathbb{R}^n$  (ou  $\mathbb{R}^+$  pour l'exemple des distributions de distances), alors la distance de base est simplement définie à partir d'une norme  $L_p$ , par exemple en 1D  $d(x, y) = |x - y|$ .

Pour des distributions périodiques (ou définies sur le cercle, la sphère ou une variété), la distance géodésique est utilisée. Ainsi pour une distribution périodique de période  $\rho$  en 1D nous utilisons  $d(x, y) = \min(|x - y|, \rho - |x - y|) = \frac{\rho}{2} - ||x - y| - \frac{\rho}{2}|$ . Dans l'exemple

des histogrammes d'angles sur  $[0, 2\pi]$ , cette distance de base s'écrit  $d(\theta, \theta') = \min(|\theta - \theta'|, 2\pi - |\theta - \theta'|) = \pi - ||\theta - \theta'| - \pi|$ . Cela permet de prendre en compte le fait que des valeurs proches respectivement de 0 et de  $2\pi$  sont à faible distance l'une de l'autre. Si nous souhaitons normaliser les valeurs de la distance de base, des formulations telles que  $\frac{d(\theta, \theta')}{\pi}$  ou  $\sin \frac{|\theta - \theta'|}{2}$  peuvent être employées. Lorsque les objets sont définis dans un espace à 3D, et donc l'histogramme d'angles est une fonction à 2D (de  $[0, 2\pi] \times [0, \pi]$  dans  $[0, 1]$ ), la distance angulaire géodésique entre deux valeurs  $(\alpha_1^1, \alpha_2^1)$  et  $(\alpha_1^2, \alpha_2^2)$  s'écrit  $\arccos(\sin \alpha_2^1 \sin \alpha_2^2 + \cos \alpha_2^1 \cos \alpha_2^2 \cos(\alpha_1^1 - \alpha_1^2))$ . Ces formulations se généralisent dans des espaces de dimension supérieure. Des distances non géodésiques peuvent également être employées, telles que des distances chorales par exemples.

### 3.1 Par transport optimal

Dans cette section nous proposons d'utiliser des métriques de transport [19, 26] pour calculer des distances entre des distributions représentant des relations spatiales, normalisées par la somme. Nous discutons ensuite l'extension de ces métriques à des mesures qui ne nécessitent pas cette normalisation ou dont les sommes ne sont pas égales. En particulier, nous étudions trois métriques, classiquement utilisées pour comparer des densités de probabilités (distance du terrassier, *earth mover's distance* ou EMD, Wasserstein, Prokhorov-Lévy), qui présentent l'avantage d'être apparentées à la même famille et d'avoir des liens avec la métrique de Hausdorff, qui à son tour peut s'exprimer en fonction d'opérateurs de morphologie mathématique. De manière générale, une métrique de transport consiste à minimiser un coût (donné par la distance sur le support) entre les plans de transport, les densités jointes ayant comme marginales les distributions à comparer. Plus de détails peuvent être trouvés dans [9, 10, 32, 37].

**Distance du terrassier ou EMD** (*Earth Moving Distance*). La distance EMD a été popularisée en vision par ordinateur dans [34] mais trouve des origines dans les travaux de Werman et al. [39]. C'est une distance *cross-bins* qui peut s'interpréter en termes de transport optimal comme nous le détaillerons par la suite. Elle est définie pour deux distributions  $f$  et  $g$  à supports discrets (de taille  $m$  et  $n$ ) par :

$$\text{EMD}(f, g) = \min_{\{c_{ij}\}} \frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} d_{ij}}{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij}} \quad (1)$$

$$\text{sous les contraintes } \sum_{j=1}^n c_{ij} \leq f_i, \sum_{i=1}^m c_{ij} \leq g_j, \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} = \min(\sum_{i=1}^m f_i, \sum_{j=1}^n g_j), c_{ij} \geq 0. \quad (3)$$

**Métrique de Wasserstein.** Afin de mieux mettre exergue son lien avec la distance de Hausdorff, nous donnons ici la définition de la métrique de Wasserstein en termes de couplage et de correspondance [23, 37]. Cette dernière notion nous sera aussi utile pour la réécriture de la distance de Hausdorff. Nous indexons dans ce qui suit les mesures de probabilités<sup>3</sup> par leurs supports. Nous considérons un espace métrique  $(M, d)$  complet et séparable auquel nous associons une tribu borélienne  $\mathcal{B}(M)$ . Nous notons  $\mathcal{P}(M)$  la collection des mesures de probabilités définies sur l'espace mesurable  $(M, \mathcal{B}(M))$  :  $\mathcal{P}(M) = \{(X, f_X) \mid X \in \mathcal{B}(M)\}$ , où  $f_X$  est une mesure dont le support est  $X$ .

Un *couplage* entre deux mesures  $f_X, g_Y \in \mathcal{P}(M)$  est une mesure  $\mu$  définie sur  $X \times Y$  telle que

$$\mu(X_0 \times Y) = f_X(X_0), \mu(X \times Y_0) = g_Y(Y_0)$$

pour tous les ensembles boréliens  $X_0 \subset X, Y_0 \subset Y$ . Nous notons  $\mathcal{M}(f_X, g_Y)$  l'ensemble des couplages entre  $f_X$  et  $g_Y$ .

Pour deux ensembles  $X$  et  $Y, R \subset X \times Y$  est une *correspondance* (entre  $X$  et  $Y$ ) si  $\forall x \in X, \exists y \in Y$  t.q.  $(x, y) \in R$ , et  $\forall y \in Y, \exists x \in X$  t.q.  $(x, y) \in R$ . Nous notons  $\mathcal{R}(X, Y)$  l'ensemble des correspondances possibles entre  $X$  et  $Y$ .

Pour  $f_X, g_Y \in \mathcal{P}(M)$ , et  $\mu$  un couplage, la métrique de Wasserstein s'écrit :

$$d_W^p(f_X, g_Y) = \inf_{\mu \in \mathcal{M}(f_X, g_Y)} \left( \int_{X \times Y} d(x, y)^p d\mu(x, y) \right)^{\frac{1}{p}}$$

pour  $p \geq 1$ ,

$$d_W^p(f_X, g_Y) = \inf_{\mu \in \mathcal{M}(f_X, g_Y)} \int_{X \times Y} d(x, y)^p d\mu(x, y)$$

pour  $0 < p < 1$ , et

$$d_W^\infty(f_X, g_Y) = \inf_{\mu \in \mathcal{M}(f_X, g_Y)} \sup_{(x, y) \in R(\mu)} d(x, y).$$

On peut remarquer que, dans le cas de probabilités discrètes et pour  $p = 1$ , la distance de Wasserstein s'écrit :

$$d_W^1(f_X, g_Y) = \min_{\mu} \left\{ \sum_{x, y} d(x, y) \mu(x, y) \mid \sum_x \mu(x, y) = g_Y(y), \right.$$

$$\left. \sum_y \mu(x, y) = f_X(x), \sum_{x, y} \mu(x, y) = \sum_x f_X(x) = \sum_y g_Y(y) \right\},$$

ce qui n'est rien d'autre que la distance EMD pour des distributions de masses égales. Notons de plus que dans le cas de distributions à une dimension, et pour  $p = 1$ , la métrique de Wasserstein se réduit à une norme  $L_1$  entre les fonctions de répartition [37].

3. Notons que nous n'avons pas forcément besoin d'une mesure de probabilité mais simplement d'une mesure additive.

**Métrie de Lévy-Prokhorov.** Une autre distance possible entre distributions de probabilités est la métrique de Prokhorov-Lévy  $d_{Pr} : \mathcal{P}(M)^2 \rightarrow [0, +\infty[$  [31]. Pour deux distributions  $f_X$  et  $g_Y$  (nous omettons dans la suite les indices pour simplifier les notations) elle s'écrit :

$$d_{Pr}(f, g) = \inf\{\varepsilon > 0 \mid \forall Z \in \mathcal{B}(M), \\ f(Z) \leq g(\delta^\varepsilon(Z)) + \varepsilon \text{ et } g(Z) \leq f(\delta^\varepsilon(Z)) + \varepsilon\} \quad (4)$$

où  $\delta^\varepsilon(Z)$  correspond à la dilatation de taille  $\varepsilon$  de  $Z$  (voir section 3.2).

Cette distance a été introduite pour généraliser la distance de Lévy définie en 1D entre fonctions de répartition par :

$$d_L(F, G) = \inf\{\varepsilon > 0 \mid \forall x \in \mathbb{R}, \\ G(x - \varepsilon) - \varepsilon \leq F(x) \leq G(x + \varepsilon) + \varepsilon\}. \quad (5)$$

En effet, la tribu des boréliens sur  $\mathbb{R}$  est engendrée par exemple par les intervalles de la forme  $Z = ]-\infty, x[$ . On a alors  $\delta^\varepsilon(Z) = ]-\infty, x + \varepsilon[$ , et  $f(Z) \leq g(\delta^\varepsilon(Z)) + \varepsilon \Leftrightarrow \int_{-\infty}^x f(t)dt \leq \int_{-\infty}^{x+\varepsilon} g(t)dt + \varepsilon \Leftrightarrow F(x) \leq G(x + \varepsilon) + \varepsilon$ . La deuxième partie se montre de la même manière.

La distance de Prokhorov-Lévy peut, à l'instar des distances EMD et de Wasserstein, être reformulée comme un problème de programmation linéaire [15], mettant en évidence la notion de transport. Nous exploitons cependant ici son équivalence avec la distance de Lévy puisque les distributions sont définies sur  $[0, 2\pi]$  ou  $\mathbb{R}^+$  dans nos exemples.

**Transport sur le cercle.** Plusieurs travaux se sont intéressés à la définition des métriques de transport sur le cercle [7, 9, 10, 28, 32, 38]. Dans le cadre de l'EMD, Pele a introduit la distance  $EMD_{MOD}$  où la distance sur le support est la distance géodésique et a proposé un algorithme linéaire pour la calculer [28]. Plus récemment, il a été démontré [32] que, dans le cas de distributions discrètes sur le cercle, pour  $p = 1$  et en considérant la distance géodésique, la distance de Wasserstein s'écrit sous la forme :

$$d_W(f, g) = \inf_{\alpha \in \mathbb{R}} \sum_{i=0}^{\rho-1} |F(i) - G(i) - \alpha| = \|F - G - \nu\|_1,$$

où  $F$  et  $G$  sont les fonctions de répartition de  $f$  et  $g$ ,  $\nu$  la valeur médiane de l'ensemble  $\{F - G\}$ , et  $i$  correspond aux indices de la discrétisation de 0 ( $i = 0$ ) à  $2\pi$  ( $i = \rho$ ).

Dans le cas de la distance de Prokhorov-Lévy, l'extension au cas circulaire peut se faire en considérant une dilatation par un élément structurant circulaire comme cela sera défini dans la section 3.2. Cette distance est difficilement calculable et n'a d'intérêt que dans des espaces de dimension supérieure à 1. En revanche, nous pouvons exploiter la formulation de la distance de Lévy en termes de

distance de Hausdorff, démontrée dans [33], pour en proposer une version circulaire. En effet la distance de Lévy peut s'écrire pour des distributions sur  $M = [0, 1]$  :

$$d_L(F, G) = \max(\sup_{x \in M} \inf_{y \in M} \max(|x - y|, |G(y) - F(x)|), \\ \sup_{y \in M} \inf_{x \in M} \max(|x - y|, |F(x) - G(y)|)). \quad (6)$$

Cette formulation permet de mettre en évidence la distance sur le support. Sa version circulaire peut alors s'écrire :

$$d_L(F, G) = \max(\sup_{x \in M} \inf_{y \in M} \max(d(x, y), |G(y) - F(x)|), \\ \sup_{y \in M} \inf_{x \in M} \max(d(x, y), |F(x) - G(y)|)), \quad (7)$$

avec  $d(x, y)$  la distance géodésique sur le cercle. Notons que la distance entre fonctions de répartition induit directement une distance entre les distributions.

**Normalisation.** Dans sa formulation générale, la distance EMD présente deux avantages. Elle ne requiert pas que les histogrammes soient normalisés par leurs sommes respectives ni qu'ils soient de la même taille. Cependant elle ne satisfait l'inégalité triangulaire que sous la condition que les masses totales des histogrammes (leurs sommes respectives) soient égales. Dans ce dernier cas, Pele [28] a proposé une extension permettant à l'EMD de vérifier les propriétés d'une métrique :

$$\widetilde{\text{EMD}}(f, g) = \min_{\{c_{ij}\}} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} d_{ij} \\ + \left| \sum_{i=1}^m f_i - \sum_{j=1}^n g_j \right| \times \alpha \max_{i,j} \{d_{ij}\}, \quad (8)$$

sous les contraintes des équations 2 et 3, avec  $\alpha \in [1/2, 1]$ .

Plus généralement, il a été démontré que toute métrique de transport  $d_T$  peut être étendue pour permettre la comparaison de distributions de masses non égales [17] comme suit :

$$D(f, g) = d_T \left( \frac{f}{f(X)}, \frac{g}{g(Y)} \right) + |f(X) - g(Y)|.$$

## 3.2 Par morphologie mathématique

L'idée dans cette partie est d'exploiter le lien entre dilatation morphologique et certaines distances [2, 35]. Ainsi, la distance minimum entre deux ensembles est la taille minimale de boule de la métrique de base telle que la dilatation d'un des deux ensembles par cette boule intersecte l'autre ensemble. La distance de Hausdorff est égale à la taille minimale de boule telle que la dilatation de chacun des ensembles par cette boule contient l'autre ensemble. Nous proposons d'utiliser le même principe sur des représentations floues de relations spatiales.

**Dilatation morphologique d'une distribution normalisée.** Nous supposons ici que les distributions représentant les relations spatiales sont normalisées par le sup (le noyau est donc non vide), et nous considérons des éléments structurants binaires pour simplifier. Si le domaine de définition  $M$  de la distribution est la droite réelle ou  $\mathbb{R}^n$  ( $\mathbb{R}^+$  pour des distributions de distances) la morphologie mathématique classique s'applique et on a  $\forall x \in M, \delta_B(f)(x) = \sup_{y \in B_x} f(y)$ , où  $f$  est la distribution à dilater,  $B$  l'élément structurant et  $B_x$  son translaté en  $x$  ( $B_x = x + B$ ).

Lorsque la distribution est périodique, cette périodicité doit être prise en compte dans la dilatation et l'élément structurant. Considérons une distribution  $f$  sur le cercle unité. Nous définissons la dilatation par :

$$\delta_{B^\alpha}(f)(\theta) = \sup_{\theta' \in B_\theta^\alpha} f(\theta') \quad (9)$$

où  $B^\alpha$  est un élément structurant d'ouverture angulaire  $\alpha$ , que nous définissons par :

– si  $\alpha \leq \pi$  :  $B_\theta^\alpha =$

$$[\theta - \alpha, \theta + \alpha] \text{ si } \theta - \alpha \geq 0 \text{ et } \theta + \alpha \leq 2\pi$$

$$[0, \theta + \alpha] \cup [\theta - \alpha + 2\pi, 2\pi] \text{ si } \theta - \alpha \leq 0 \text{ et } \theta + \alpha \leq 2\pi$$

$$[\theta - \alpha, 2\pi] \cup [0, \theta + \alpha - 2\pi] \text{ si } \theta - \alpha \geq 0 \text{ et } \theta + \alpha \geq 2\pi$$

– si  $\alpha \geq \pi$  :  $B_\theta^\alpha = [0, 2\pi]$ .

La figure 1 illustre la dilatation d'une distribution sur  $[0, 2\pi]$ .

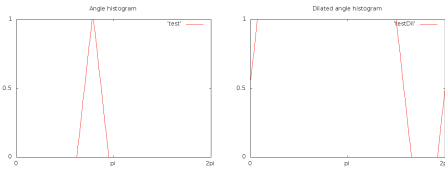


Figure 1 – Distribution sur  $[0, 2\pi]$  et exemple de dilatation prenant en compte la périodicité.

Ces définitions s'étendent à une distribution  $f$  sur la sphère unité, soit en définissant deux éléments structurants en considérant séparément la longitude et la latitude, soit en définissant un élément structurant par seuillage de la distance géodésique sur la sphère.

La normalisation garantit que le noyau est étendu selon la taille de l'élément structurant par dilatation. En particulier, il est toujours possible de trouver une taille de dilatation telle qu'un point donné du support appartienne au noyau de la distribution dilatée.

Il est facile de montrer que  $B^\alpha$  est une boule de rayon  $\alpha$  de  $d$  et que  $\delta_{B^\alpha}(f)(\theta) = \sup\{f(\theta') \mid d(\theta, \theta') \leq \alpha\}$ .

4. Le cas  $\theta - \alpha \leq 0$  et  $\theta + \alpha \geq 2\pi$  implique  $\alpha \geq \pi$ .

**Distance minimum par dilatation.** Une fois que la dilatation est définie, la distance minimum peut être calculée selon le principe décrit en introduction de cette section [2, 35]. Soit  $\Delta_\cap(f, g)$  le degré d'intersection entre  $f$  et  $g$ . Dans le cas flou général, la distance minimum entre deux distributions  $f$  et  $g$  définies sur  $M$  est un nombre flou défini par [2] :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}^{+*}, \quad d_{\min}(f, g)(\lambda) = t(\Delta_\cap(f, \delta_{B^\lambda}(g)), \inf_{0 \leq \lambda' < \lambda} c(\Delta_\cap(f, \delta_{B^{\lambda'}}(g)))) \quad (10)$$

et  $d_{\min}(f, g)(0) = \Delta_\cap(f, g)$ , où  $B^\lambda$  est un élément structurant de taille  $\lambda$ ,  $t$  est une t-norme et  $c$  une complémentation. Le degré d'intersection peut être défini classiquement par  $\Delta_\cap(f, g) = \sup_{x \in M} t(f(x), g(x))$ . Les propriétés de la distance minimum floue peuvent être trouvées dans [2]. Si l'on souhaite réduire ce nombre flou à un nombre précis, nous proposons d'utiliser soit le centre de gravité  $\frac{\int_0^\infty d_{\min}(f, g)(\lambda) \lambda d\lambda}{\int_0^\infty d_{\min}(f, g)(\lambda) d\lambda}$ , soit la définition suivante :

$$d_{\min}(f, g) = \inf\{\lambda \in \mathbb{R}^+ \mid \Delta_\cap(\delta_{B^\lambda}(f), g) = 1\} \quad (11)$$

avec une définition binaire du degré d'intersection, telle que  $\Delta_\cap(f, g) = 1 \Leftrightarrow \exists x \in M \mid \min(f(x), g(x)) \neq 0$ . En pratique les valeurs sont quantifiées, et les propriétés de la dilatation floue [4, 5] permettent de ne considérer pour  $\lambda'$  que la plus grande valeur immédiatement inférieure à  $\lambda$  dans l'équation 10.

Un exemple de distribution sur  $[0, 2\pi]$  (histogramme d'angles par exemple) est montré dans la figure 2, avec trois translations. Les valeurs de distances selon l'équation 11 sont données dans le tableau 1. Comme cela était attendu sur cet exemple très simple, les résultats correspondent à la distance minimum entre les supports des distributions.

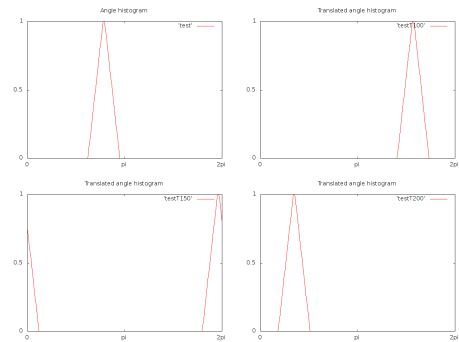


Figure 2 – Exemple de distribution sur  $[0, 2\pi]$  et trois translations ( $T = 2, 45, T = 3, 68, T = 4, 9$ ).

**Distance de Hausdorff par dilatation.** Selon la même approche, la distance de Hausdorff peut être définie à partir d'un degré d'inclusion  $\Delta_\subseteq(f, g)$  (degré avec lequel  $f$  est inclus dans  $g$ ) et de dilatations [2] :  $\forall \lambda \in \mathbb{R}^{+*}$ ,

$$d_H(f, g)(\lambda) = t(d_H^f(f, g)(\lambda), d_H^g(g, f)(\lambda)) \quad (12)$$

Distance	$T = 0$	$T = 2,45$	$T = 3,68$	$T = 4,9$
Minimum	0	1,47	1,62	0,39
Hausdorff	0	2,45	2,60	1,37

Tableau 1 – Distances minimum et de Hausdorff, calculées par dilatations morphologiques (équations 11 et 13), entre la première distribution de la figure 2 et toutes les autres (valeurs en radians dans  $[0, 2\pi]$ ).

avec

$$d'_H(f, g)(\lambda) = t(\Delta_{\subseteq}(f, \delta_{B^\lambda}(g)), \inf_{0 \leq \lambda' < \lambda} c(\Delta_{\subseteq}(f, \delta_{B^{\lambda'}}(g))))),$$

et  $d'_H(f, g)(0) = \Delta_{\subseteq}(f, g)$ . Le degré d'inclusion s'écrit classiquement  $\Delta_{\subseteq}(f, g) = \inf_{x \in M} I(f(x), g(x))$  où  $I$  est une implication floue. Les propriétés de la distance de Hausdorff floue, ainsi que des références à d'autres définitions de cette distance, peuvent être trouvées dans [2]. Pour réduire ce nombre flou à un nombre précis, nous proposons, comme pour la distance minimum, d'utiliser son centre de gravité, ou la définition suivante :

$$d_H(f, g) = \inf\{\lambda \in \mathbb{R}^+ \mid \forall x \in M, \delta_{B^\lambda}(f)(x) \geq g(x) \text{ et } \delta_{B^\lambda}(g)(x) \geq f(x)\}, \quad (13)$$

ce qui correspond à une définition nette de l'inclusion. Les valeurs obtenues pour les exemples de la figure 2 sont données dans le tableau 1. Elles correspondent à la distance entre les noyaux des distributions, ce qui était attendu pour ce cas simple.

### 3.3 Propriétés

Les définitions proposées ont les propriétés suivantes :

- dans le cas où les distributions sont des fonctions de Dirac (une seule valeur non nulle, en  $f_0$  et  $g_0$ ), les distances proposées sont égales à  $d(f_0, g_0)$ , où  $d$  est la distance de base sur le support des distributions (la preuve est immédiate) ;
- toutes les distances proposées sont positives et symétriques, par construction ;
- les métriques de transport satisfont l'inégalité triangulaire ;
- la distance morphologique minimum, comme dans le cas ensembliste classique, n'est pas séparable (elle vaut 0 dès que les supports des distributions s'intersectent) et ne satisfait pas l'inégalité triangulaire ;
- la distance morphologique de Hausdorff avec une version stricte du degré d'inclusion (équation 13) est séparable et vérifie l'inégalité triangulaire, alors que la version floue du degré d'inclusion donne une distance (équation 12) qui est séparable pour l'implication de Lukasiewicz, mais ne satisfait pas l'inégalité triangulaire [2] ;

- les métriques de transport considérées dans cet article correspondent à la distance de Hausdorff entre les supports dans le cas de distributions uniformes sur le support, comme le montre la réécriture de la distance de Hausdorff entre ensembles en termes de correspondance :

$$d_H(X, Y) = \inf_{R \in \mathcal{R}(X, Y)} \sup_{(x, y) \in R} d(x, y).$$

## 4 Exemple

Nous présentons dans cette section un exemple pour illustrer les résultats obtenus avec les approches proposées pour quantifier l'évolution temporelle de relations spatiales, dans une séquence vidéo synthétique dont quelques images sont montrées dans la figure 3. L'objet gris se rapproche de l'objet blanc selon une direction constante, puis change de direction et s'éloigne. Les histogrammes d'angles  $ha$  entre ces deux objets, calculés comme décrit dans la section 2, sont illustrés dans la figure 4.



Figure 3 – Quelques images d'une séquence vidéo synthétique.

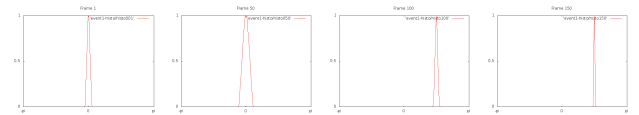


Figure 4 – Histogrammes d'angles entre les deux objets de la séquence de la figure 3.

Ces histogrammes sont ensuite comparés selon les différentes mesures proposées, en calculant la distance entre l'histogramme à l'instant  $t$  et l'histogramme dans la première image de la séquence. Les courbes montrant cette distance au cours du temps sont données dans la figure 5 pour les distances minimum et de Hausdorff morphologiques, dans la figure 6 pour l'EMD (avec les deux normalisations, par le sup et par la somme), et dans la figure 7 pour la distance de Prokhorov-Lévy. Dans toutes ces courbes, on remarque un saut au moment du changement de direction, ce qui était attendu. On notera aussi la grande similarité entre ces courbes, en particulier entre celle de la distance de Hausdorff et celle de l'EMD obtenue pour la normalisation par le sup.

## 5 Conclusion

Nous avons proposé dans cet article de comparer des relations spatiales représentées par des distributions ou des

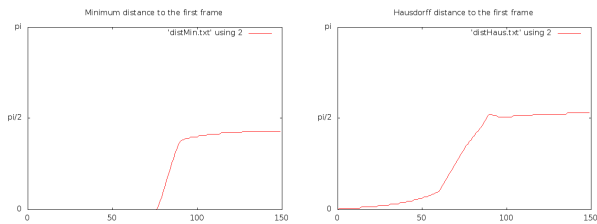


Figure 5 – Distances minimum et de Hausdorff entre l’histogramme de chaque image et celui de la première image.

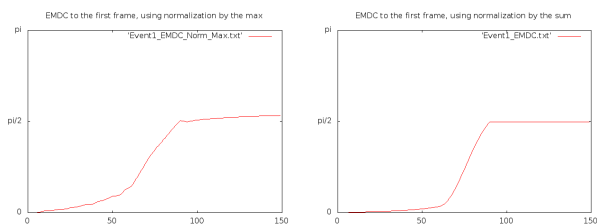


Figure 6 – Distance EMD entre l’histogramme de chaque image et celui de la première image, les histogrammes étant normalisés par le sup (à gauche) et par la somme (à droite).

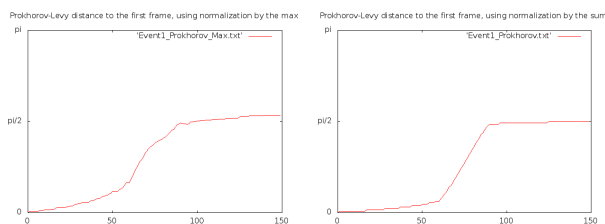


Figure 7 – Distance de Prokhorov-Lévy entre l’histogramme de chaque image et celui de la première image, les histogrammes étant normalisés par le sup (à gauche) et par la somme (à droite).

nombres flous par deux approches, l’une fondée sur le transport optimal et l’autre sur des distances calculées à partir de dilations morphologiques.

L’exemple sur une vidéo synthétique montre que les distances proposées évoluent dans la séquence de manière conforme à l’intuition, et permettent en particulier de détecter des changements dans les relations spatiales entre les objets observés. D’autres exemples, en particulier sur des images réelles, ont permis de montrer l’intérêt des évaluations sous forme de nombres ou sous forme de nombres flous<sup>5</sup>, à la fois pour des relations de distance et pour des relations directionnelles.

Outre la poursuite des expérimentations sur d’autres images et d’autres relations spatiales, les perspectives en-

visagées concernent l’étude de liens entre les distances proposées, d’une part entre les différentes métriques de la section 3.1, et d’autre part entre les différentes versions de la distance de Hausdorff proposées (par transport et par morphologie mathématique).

**Remerciements.** Les travaux présentés dans cet article ont été en partie financés par l’ANR (projets LOGIMA et DESCRIBE). Les auteurs remercient Abdalbassir Abou-Elailah pour la simulation des séquences vidéo.

## Références

- [1] S. Aksoy. Modeling of remote sensing image content using attributed relational graphs. In D.-Y. Yeung et al., editor, *Structural, Syntactic, and Statistical Pattern Recognition*, volume LNCS 4109, pages 475–483, Berlin, Heidelberg, 2006. Springer.
- [2] I. Bloch. On Fuzzy Distances and their Use in Image Processing under Imprecision. *Pattern Recognition*, 32(11) :1873–1895, 1999.
- [3] I. Bloch. Fuzzy Spatial Relationships for Image Processing and Interpretation : A Review. *Image and Vision Computing*, 23(2) :89–110, 2005.
- [4] I. Bloch. Duality vs. Adjunction for Fuzzy Mathematical Morphology and General Form of Fuzzy Erosions and Dilations. *Fuzzy Sets and Systems*, 160 :1858–1867, 2009.
- [5] I. Bloch and H. Maître. Fuzzy Mathematical Morphologies : A Comparative Study. *Pattern Recognition*, 28(9) :1341–1387, 1995.
- [6] I. Bloch and A. Ralescu. Directional Relative Position between Objects in Image Processing : A Comparison between Fuzzy Approaches. *Pattern Recognition*, 36 :1563–1582, 2003.
- [7] C. A. Cabrelli and U. M. Molter. The Kantorovich metric for probability measures on the circle. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 57(3) :345 – 361, 1995.
- [8] O. Colliot, O. Camara, and I. Bloch. Integration of Fuzzy Spatial Relations in Deformable Models - Application to Brain MRI Segmentation. *Pattern Recognition*, 39 :1401–1414, 2006.
- [9] J. Delon, J. Salomon, and A. Sobolevski. Fast Transport Optimization for Monge Costs on the Circle. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 70(7) :2239–2258, 2010.
- [10] J. Delon, J. Salomon, and A. Sobolevski. Local matching indicators for transport problems with concave costs. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 26(2) :801–827, 2012.
- [11] A. Deruyver, Y. Hodé, and L. Brun. Image interpretation with a conceptual graph : Labeling over-segmented images and detection of unexpected objects. *Artificial Intelligence*, 173(14) :1245–1265, 2009.
- [12] R. M. Dudley. Distances of probability measures and random variables. *The Annals of Mathematical Statistics*, 39(5) :1563–1572, 1968.

5. <http://www.perso.telecom-paristech.fr/~bloch/shared/1fa2014Exemples.pdf>

- [13] G. Fouquier, J. Atif, and I. Bloch. Sequential model-based segmentation and recognition of image structures driven by visual features and spatial relations. *Computer Vision and Image Understanding*, 116(1) :146–165, January 2012.
- [14] J. Freeman. The Modelling of Spatial Relations. *Computer Graphics and Image Processing*, 4(2) :156–171, 1975.
- [15] B. Garel and J.-C. Massé. Calculation of the Prokhorov distance by optimal quantization and maximum flow. *AStA Advances in Statistical Analysis*, 93(1) :73–88, 2009.
- [16] J. Gasós and A. Saffiotti. Using Fuzzy Sets to Represent Uncertain Spatial Knowledge in Autonomous Robots. *Journal of Spatial Cognition and Computation*, 1 :205–226, 2000.
- [17] M. Gromov. Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces. *Progress in Mathematics*, 152, 1999.
- [18] J. Guo, H. Zhou, and C. Zhu. Cascaded classification of high resolution remote sensing images using multiple contexts. *Information Sciences*, 221 :84–97, 2013.
- [19] L. Kantorovich. On the transfer of masses. *Dokl. Akad. Nauk. SSSR (en russe)*, 37(2) :227–229, 1942.
- [20] B. Kuipers. Modeling Spatial Knowledge. *Cognitive Science*, 2 :129–153, 1978.
- [21] F. Le Ber, J. Lieber, and A. Napoli. Les systèmes à base de connaissances. In J. Akoka and I. Comyn Wattiau, editors, *Encyclopédie de l’informatique et des systèmes d’information*, pages 1197–1208. Vuibert, 2006.
- [22] P. Matsakis and L. Wendling. A New Way to Represent the Relative Position between Areal Objects. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 21(7) :634–642, 1999.
- [23] F. Memoli. On the use of Gromov-Hausdorff distances for shape comparison. In *Eurographics Symposium on Point-Based Graphics*, pages 81–90, 2007.
- [24] K. Miyajima and A. Ralescu. Spatial Organization in 2D Images. In *Third IEEE Int. Conf. on Fuzzy Systems, FUZZ-IEEE’94*, pages 100–105, Orlando, FL, June 1994.
- [25] R. Mohan and R. Nevatia. Perceptual organization for scene segmentation and description. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 14(6) :616–635, 1992.
- [26] G. Monge. Mémoire sur la théorie des déblais et des remblais. In *Histoire de l’Académie Royale des Sciences*. 1781.
- [27] O. Nempont, J. Atif, and I. Bloch. A constraint propagation approach to structural model based image segmentation and recognition. *Information Sciences*, 246 :1–27, 2013.
- [28] O. Pele and M. Werman. A linear time histogram metric for improved SIFT matching. In *European Conference on Computer Vision, ECCV*, pages 495–508, 2008.
- [29] O. Pele and M. Werman. Fast and robust earth mover’s distances. In *IEEE 12th International Conference on Computer Vision*, pages 460–467, 2009.
- [30] O. Pele and M. Werman. The quadratic-chi histogram distance family. In *European Conference on Computer Vision*, pages 749–762, 2010.
- [31] Y. Prokhorov. Convergence of random processes and limit theorems in probability theory. *Theory of Probability & Its Applications*, 1(2) :157–214, 1956.
- [32] J. Rabin, J. Delon, and Y. Gousseau. Transportation distances on the circle. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 41(1-2) :147–167, 2011.
- [33] S. T. Rachev. Minimal metrics in the real random variables space. In *Stability Problems for Stochastic Models*, pages 172–190, 1983.
- [34] Y. Rubner, C. Tomasi, and L. J. Guibas. The earth mover’s distance as a metric for image retrieval. *International Journal of Computer Vision*, 40(2) :99–121, 2000.
- [35] J. Serra. *Image Analysis and Mathematical Morphology*. Academic Press, New-York, 1982.
- [36] M.-C. Vanegas, I. Bloch, and J. Inglada. Alignment and parallelism for the description of high resolution remote sensing images. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 51(6) :3542–3557, June 2013.
- [37] C. Villani. *Optimal transport : old and new*. Springer, Berlin, 2003.
- [38] M. Werman, S. Peleg, R. Melder, and T.Y Kong. Bipartite graph matching for points on a line or a circle. *Journal of Algorithms*, 7(2) :277 – 284, 1986.
- [39] M. Werman, S. Peleg, and A. Rosenfeld. A distance metric for multidimensional histograms. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, 32(3) :328–336, 1985.