



*Royaume du Maroc*  
*Ministère de l'Éducation Nationale, de la Formation Professionnelle*  
*de l'Enseignement Supérieur & de la Recherche Scientifique*

*RAPPORT D'AGREGATION*  
*DE MATHÉMATIQUES*  
*SESSION 2021*

*AGREGATION DE MATHÉMATIQUES MAROCAINE - SESSION 2021*



# AGREGATION DE MATHEMATIQUES MAROCAINE SESSION 2021

RAPPORT DU JURY PRÉSENTÉ PAR :  
*Professeur Omar El-Fallah : Président du jury*  
*Université Mohammed V de Rabat*  
*Faculté des Sciences de Rabat*  
e-mail: o.elfallah@um5r.ac.ma



# Table des Matières

<b>1</b>	<b>Composition du jury</b>	<b>5</b>
1.1	Directoire . . . . .	5
1.2	Jury . . . . .	5
1.2.1	Analyse et Probabilités . . . . .	5
1.2.2	Algèbre et Géométrie . . . . .	5
1.2.3	Modélisation et Calcul Scientifique . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Introduction</b>	<b>7</b>
<b>3</b>	<b>Déroulement du concours et résultats</b>	<b>9</b>
3.1	Déroulement de la session 2021 . . . . .	9
3.2	Résultats généraux . . . . .	10
<b>4</b>	<b>Statistiques</b>	<b>13</b>
4.1	Répartition des notes des épreuves écrites . . . . .	13
4.1.1	Répartition des candidats admissibles selon le genre . . . . .	13
4.1.2	Répartition des notes des épreuves écrites . . . . .	13
4.2	Répartition des notes des épreuves orales . . . . .	14
4.2.1	Bilan des épreuves écrites et comparaison : de 2017 à 2021 . . . . .	14
4.2.2	Bilan des épreuves orales et comparaison : de 2017 à 2021 . . . . .	15
4.3	Evolution du nombre de candidats . . . . .	16
<b>5</b>	<b>Déroulement des épreuves orales</b>	<b>19</b>
5.1	Epreuve d’algèbre et géométrie . . . . .	19
5.1.1	Modalités . . . . .	19
5.1.2	Remarques et recommandations . . . . .	20
5.2	Epreuve d’analyse et probabilités : . . . . .	21
5.2.1	Modalités . . . . .	21
5.2.2	Remarques et recommandations . . . . .	21
5.3	Epreuve de modélisation et calcul scientifique : . . . . .	22
5.3.1	Modalités . . . . .	22
5.3.2	Remarques et recommandations . . . . .	22
<b>6</b>	<b>Listes des leçons</b>	<b>23</b>
6.1	Liste des leçons d’Algèbre et Géométrie . . . . .	23
6.2	Liste des Leçons d’Analyse et Probabilités . . . . .	25
6.3	Liste des leçons de modélisation et calcul scientifique . . . . .	26

<b>7</b>	<b>Textes de l'épreuve de modélisation</b>	<b>29</b>
7.1	Texte 1 de l'épreuve de modélisation . . . . .	30
7.1.1	Introduction, l'image numérique . . . . .	30
7.1.2	Analyse élémentaire de l'image numérique . . . . .	30
7.1.3	Compression d'image numérique par SVD . . . . .	31
7.1.4	Extrait d'un sujet de concours CPGE sur la SVD . . . . .	31
7.1.5	Indications pour le traitement d'images avec des logiciels mathématiques . . . . .	33
7.1.6	Suggestions de développement . . . . .	34
7.2	Texte 2 de l'épreuve de modélisation . . . . .	35
7.2.1	Le problème de Dirichlet . . . . .	35
7.2.2	Méthodes numériques de résolution . . . . .	36
7.2.3	Un extrait de sujet posé en concours CPGE . . . . .	37
7.2.4	Suggestions de développement . . . . .	38
7.3	Texte 3 de l'épreuve de modélisation . . . . .	39
7.3.1	Introduction, modélisation de gestion de stock . . . . .	39
7.3.2	Données pour comparaison de stratégies de stock . . . . .	40
7.3.3	Quelques outils probabilistes . . . . .	40
7.3.4	Outils informatiques . . . . .	41
7.3.5	Suggestions de développement . . . . .	41
7.4	Texte 4 de l'épreuve de modélisation . . . . .	43
7.5	Texte 5 de l'épreuve de modélisation . . . . .	46
7.6	Texte 6 de l'épreuve de modélisation . . . . .	51
7.7	Texte 7 de l'épreuve de modélisation . . . . .	55
<b>8</b>	<b>Programme du concours de l'agrégation - Session 2021</b>	<b>59</b>
8.1	Algèbre linéaire . . . . .	59
8.1.1	Espaces vectoriels . . . . .	59
8.1.2	Espaces vectoriels de dimension finie . . . . .	59
8.2	Groupes . . . . .	60
8.3	Groupes Anneaux, corps et polynômes . . . . .	60
8.4	Formes bilinéaires et quadratiques sur un espace vectoriel . . . . .	61
8.5	Géométrie affine et euclidienne . . . . .	61
8.6	Analyse à une variable réelle . . . . .	62
8.6.1	Nombres réels . . . . .	62
8.6.2	Séries numériques . . . . .	62
8.6.3	Fonctions définies sur une partie de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles . . . . .	62
8.6.4	Fonctions usuelles . . . . .	62
8.6.5	Intégration . . . . .	63
8.6.6	Suites et séries de fonctions . . . . .	63
8.6.7	Convexité . . . . .	63
8.7	Analyse à une variable complexe . . . . .	63
8.7.1	Séries entières . . . . .	63
8.7.2	Fonctions d'une variable complexe . . . . .	63
8.8	Topologie . . . . .	63
8.8.1	Topologie et espaces métriques . . . . .	63
8.8.2	Espaces vectoriels normés sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ . . . . .	64
8.8.3	Espaces de Hilbert . . . . .	64
8.9	Calcul différentiel . . . . .	64

8.9.1	Fonctions différentiables . . . . .	64
8.9.2	Équations différentielles— . . . . .	65
8.9.3	Géométrie différentielle . . . . .	65
8.10	Calcul intégral . . . . .	65
8.10.1	Notions de théorie de la mesure . . . . .	65
8.10.2	Intégration . . . . .	65
8.10.3	Analyse de Fourier . . . . .	65
8.11	Probabilités . . . . .	66
8.11.1	Définition d'un espace probabilisé . . . . .	66
8.11.2	Variables aléatoires, loi d'une variable aléatoire . . . . .	66
8.11.3	Convergences de suites de variables aléatoires . . . . .	66
8.12	Distributions . . . . .	66
8.12.1	Espaces $S(\mathbb{R}^d)$ et $S'(\mathbb{R}^d)$ . . . . .	66
8.12.2	Applications . . . . .	66
8.13	Méthodes numériques . . . . .	67
8.13.1	Résolution de systèmes d'équations linéaires . . . . .	67
8.13.2	Méthodes itératives de résolution approchée d'équations réelles et vecto- rielles . . . . .	67
8.13.3	Intégration numérique . . . . .	67
8.13.4	Approximation de fonctions numériques . . . . .	67
8.13.5	Transformée de Fourier . . . . .	67
<b>9</b>	<b>Anexe : Sujets du concours</b>	<b>69</b>
9.1	Épreuve écrite de mathématiques générales . . . . .	69
9.2	Épreuve écrite d'analyse et probabilités . . . . .	80



# Chapitre 1

## Composition du jury

### 1.1 Directoire

El-Fallah Omar	Professeur de l'enseignement supérieur
Ouassou Idir	Professeur de l'enseignement supérieur
Alla Abdellah	Professeur de l'enseignement supérieur habilité

### 1.2 Jury

#### 1.2.1 Analyse et Probabilités

Bakhouch Brahim	Professeur agrégé
Erraoui Mohamed	Professeur de l'enseignement supérieur
Sadik Omar	Professeur agrégé
Zerouali Elhassan	Professeur de l'enseignement supérieur

#### 1.2.2 Algèbre et Géométrie

Bouchikhi Lahcen	Professeur de l'enseignement supérieur
El Amdaoui Mostapha	Professeur agrégé
Hajmi Said	Professeur agrégé
Zguiti Hassan	Professeur de l'enseignement supérieur

#### 1.2.3 Modélisation et Calcul Scientifique

Boujaida Sadik	Professeur agrégé
Elkahoui M'hammed	Professeur de l'enseignement supérieur
Kanbar Ahmed	Professeur de l'enseignement supérieur
Taik Ahmed	Professeur de l'enseignement supérieur



# Chapitre 2

## Introduction

Le concours de l'agrégation a pour vocation de recruter des professeurs agrégés destinés à exercer dans les lycées d'enseignement général et technologique ou dans les classes préparatoires aux grandes écoles. Le jury exige du professeur agrégé un niveau lui permettant d'intervenir sereinement et efficacement sur ces créneaux. Cet objectif calibre la conception du programme et les critères d'évaluation.

La session 2021 du concours d'agrégation de mathématiques a connue la participation de nouveaux membres dans les trois comités du jury, le comité d'Analyse et Probabilités, le comité d'Algèbre et Géométrie et le comité Modélisation et Calcul Scientifique.

C'est aussi la huitième session ouverte aux agrégatifs de la deuxième année du cycle de préparation à l'agrégation instaurée aux C.R.M.E.F du Royaume. Le cycle de formation C.R.M.E.F dure deux ans et est ouvert, après concours, aux étudiants titulaires d'un master, aux ingénieurs d'Etat ainsi qu'aux professeurs de second cycle titulaires d'une licence avec trois années d'ancienneté.

Au terme de la préparation, les candidats composent à Rabat, comme leurs pairs en France, les mêmes épreuves écrites, sous la présidence d'un jury français et en présence de représentants marocains.

Les épreuves sont ensuite envoyées en France pour correction. L'opération de déchiffrement des résultats se fait en France. Une réunion du jury marocain est tenue à Rabat pour la déclaration des candidats admissibles. Ensuite, les candidats retenus doivent passer l'oral devant le jury marocain, à qui revient le dernier mot en ce qui concerne l'admission.

La session 2021 du concours de l'agrégation de mathématiques marocaine s'est caractérisée par l'augmentation du nombre de postes offerts par rapport à la session précédente: 50 postes (contre 45 en 2020). De même, une augmentation du nombre des inscrits au concours en 2021 par rapport à 2020 est enregistrée :

- le nombre de candidats inscrits était de 301 (contre 191 en 2020), ce qui correspond à une augmentation d'environ 157 %,
- le nombre de candidats ayant composé aux deux épreuves écrites d'agrégation est de 133,
- suite à une erreur d'affichage de la liste des admissibles, le jury a décidé, en concertation avec les différents intervenants, de convoquer les 133 candidats présents aux deux épreuves écrites. Notons que le nombre de candidats ayant obtenu une moyenne supérieure ou égale à 05/20 (la barre d'admissibilité fixée par le jury français) est de 84.

Le jury souligne que parmi les candidats, il y avait des ingénieurs d'état ainsi que des candidats de la première année de la formation C.R.M.E.F.

Ce rapport a pour objectif de présenter les résultats de la session 2021 et de donner des remarques et des conseils aux candidats de la session 2022 pour une meilleure préparation.

L'ensemble de membres du jury tiens à remercier vivement, pour le soutien matériel et moral:

1. Le Centre National des Innovations Pédagogiques et de l'Expérimentation.
2. L'Unité Centrale de la Formation des Cadres.
3. La direction du C.R.M.E.F de Rabat.

Ces équipes n'ont épargné aucun effort pour la réussite et le bon déroulement de ce concours.

# Chapitre 3

## Déroulement du concours et résultats

### 3.1 Déroulement de la session 2021

#### Déroulement des épreuves écrites

Les épreuves écrites d'admissibilité ont eu lieu les 3 et 4 mars 2021 selon le calendrier suivant:

- épreuve de mathématiques générales le 3 mars 2021,
- épreuve d'analyse et probabilités le 4 mars 2021,

Les délibérations pour l'admissibilité ont eu lieu le 14 mai. Rappelons que le concours fait l'objet de conventions internationales qui lient le Maroc, la France et la Tunisie et que la note des épreuves écrites représente les 2/5 de la note finale.

Les candidats admissibles ont reçu la convocation pour le vendredi 18 juin 2021, précisant la période de passage des épreuves orales.

#### Déroulement des épreuves orales

Les épreuves d'admission se sont déroulées du samedi 19 juin 2021 au jeudi 1 juillet 2021 et du lundi 5 juillet 2021 au samedi 10 juillet 2021. La liste d'admission a été publiée le dimanche 11 juillet 2021. Le jury et les candidats y ont trouvé d'excellentes conditions de travail et ont profité d'un accueil chaleureux et dévoué.

Les oraux de l'agrégation sont constitués de trois épreuves:

- Algèbre et géométrie;
- Analyse et probabilités;
- Modélisation et calcul scientifique.

#### Vendredi 18 Juillet 2021 à partir de 14h00 au CRMEF, Rabat

- Réunion d'accueil présidée par O. EL FALLAH, président du jury, à partir 10 h;
- Préparation des couplages et mise sous enveloppes;
- Élaboration du planning de préparation et de passage des candidats par épreuve;
- Validation, par les candidats, du planning anonyme de passage par épreuve;

- Inspection, par les membres du jury, de la bibliothèque et de la salle d'informatique, et contrôle des ouvrages apportés par les candidats.

Tirage de la première liste le vendredi 18 juin 2021 à partir de 14h au CRMEF, Rabat

- Tirage au sort de l'ordre de passage des candidats vers 14h;
- Tirage au sort par les candidats des enveloppes contenant les sujets des différentes épreuves vers 17h;

Tirage de la deuxième liste le vendredi 25 juin 2021 à partir de 10h au CRMEF, Rabat;

- Tirage au sort de l'ordre de passage des candidats vers 10h;
- Tirage au sort par les candidats des enveloppes contenant les sujets des différentes épreuves vers 11h;

**Remarque 3.1.1** *Il est rappelé que pendant la préparation, le candidat peut utiliser les ouvrages qui se trouvent sur place à la bibliothèque du CPAM. Il peut également utiliser les ouvrages de référence qu'il peut lui même apporter. Ces ouvrages ne doivent pas comporter de notes manuscrites et doivent être remis à l'administration la veille du commencement du concours, afin que le jury puisse les contrôler avant d'autoriser leur utilisation. Ainsi, après enregistrement, ils seront mis à la disposition de tous les candidats.*

**Du Samedi 19 Juin 2021 au Jeudi 01 juillet 2021 et du Lundi 05 Juillet 2021 au Samedi 10 Juillet 2021: Déroulement des épreuves orales;**

**Dimanche 11 Juillet 2021 de 09 h à 12 h: délibérations, proclamation des résultats et réunion avec les formateurs des CRMEF du Royaume.**

## 3.2 Résultats généraux

Candidats marocains inscrits pour les épreuves écrites	301
Postes mis au concours	50
Candidats marocains présents à toutes les épreuves écrites	133
Candidats éliminés	0
Candidats admissibles	133
Candidats ayant une moyenne $\geq 05/20$	84
Candidats admis	37

Tableau 1 - Résultats généraux de la session 2021

**Résultat du concours national  
de l'agrégation de mathématiques  
Session 2021**

**Liste des admis par ordre alphabétique**

Ordre	Nom	Prénoms	Décision du jury
1	AATRIF	ZINEB	Admis
2	ALOUAT	MOHAMED	Admis
3	BAKKAS	MOHAMED	Admis
4	BEN HADDOU	ABDELHALIM	Admis
5	BENOMAR	IDRISS	Admis
6	BOUFRIKECH	TARIK	Admis
7	BOUYAKNIFEN	KHALID	Admis
8	EL HAMAOU	MOHAMED	Admis
9	EL HANINE	RAGHIA	Admis
10	EL MOUTARAJI	IMAD	Admis
11	ELBARBOUCHI	AHMED	Admis
12	ELBOUCHTIOUI	EN NAJI	Admis
13	ELOUARRATE	ABDELLATIF	Admis
14	ENNADIFI	ZAKARIAE	Admis
15	ESSALHIOUI	KARAM	Admis
16	ESSOUI	HASNA	Admis
17	EZ-ZERRIFI	HASSAN	Admis
18	FADILI	MOSTAFA	Admis
19	ICHOU	RACHID	Admis
20	JAHD	MERYEME	Admis
21	JOUAHRI	ALI	Admis
22	JOUNDY	MOUAD	Admis
23	KHATTAT	OUAIL	Admis
24	LAAMARTI	YASSINE	Admis
25	LAARABI	HICHAM	Admis
26	LABZIOUI	ZINEB	Admis
27	LAKRINI	IBRAHIM	Admis
28	LAZRAQ	ISSAM	Admis
29	MAKHZER	ABDELKRIM	Admis
30	NABIGH	ANAS	Admis
31	OUARIAGLI MOUTHABE	ISMAIL	Admis
32	OUZAKI	ABDELHAK	Admis
33	RACHIDI	MOHAMED	Admis
34	SABIL	ABDEL-ILAH	Admis
35	SIDIALI	NOUHAILA	Admis
36	TCHAY	HICHAM	Admis
37	ZAHRAOUI	YOUSSEF	Admis

Nombre total de candidats déclarés admis : Trente sept ( 37 )

**Résultat du concours national  
de l'agrégation de mathématiques**

**Session 2021**

**Candidats admis et proposés pour effectuer un stage  
probatoire en CPGE**

Ordre	Nom	Prénoms
1	JOUAHRI	ALI
2	ESSALHIOUI	KARAM
3	JOUNDY	MOUAD
4	LAAMARTI	YASSINE
5	NABIGH	ANAS
6	EL HAMAQUI	MOHAMED
7	ICHOU	RACHID
8	ELOUARRATE	ABDELLATIF
9	EL HANINE	RAGHIA
10	TCHAY	HICHAM
11	SIDIALI	NOUHAILA
12	BEN HADDOU	ABDELHALIM
13	ELBARBOUCHI	AHMED
14	EL MOUTARAJJI	IMAD
15	BENOMAR	IDRISS
16	OUZAKI	ABDELHAK
17	LABZIOUI	ZINEB
18	RACHIDI	MOHAMED
19	ENNADIFI	ZAKARIAE
20	LAKRINI	IBRAHIM
21	SABIL	ABDEL-ILAH
22	LAZRAQ	ISSAM
23	LAARABI	HICHAM

**Candidats proposés pour effectuer un stage probatoire en  
CPGE : Vingt trois (23 )**

# Chapitre 4

## Statistiques

### 4.1 Répartition des notes des épreuves écrites

#### 4.1.1 Répartition des candidats admissibles selon le genre

Parmi les candidats admissibles on trouve :

Sexe	Nombre	Pourcentage
Femme	18	13,6%
Hommes	115	86,4%

Parmi les 84 candidats admissibles avec une moyenne  $\geq 05/20$  on trouve :

Sexe	Nombre	Pourcentage
Femme	10	11,9%
Hommes	74	88,1%

Répartition des admissibles selon le genre

#### 4.1.2 Répartition des notes des épreuves écrites

**Les caractéristiques descriptives de chaque épreuve écrite des 133 candidats**

Epreuve	Min	Max	Moyenne	Ecart-type	la médiane
Mathématiques générales (note sur 20)	0,50	15,75	5,75	2,82	5,25
Analyse et probabilités (note sur 20)	0,25	13,50	6,28	2,92	6
Total écrit (note sur 40)	0,75	29	12,03	5,49	11,50

Les caractéristiques descriptives des notes à l'épreuve écrite

**Les caractéristiques descriptives de chaque épreuve écrite des 84 candidats ayant obtenu, dans les épreuves écrites, une note  $\geq 05/20$**

Epreuve	Min	Max	Moyenne	Ecart-type	la médiane
Mathématiques générales (note sur 20)	3,25	15,75	7,22	2,39	7
Analyse et probabilités (note sur 20)	2,75	13,50	7,90	2,17	7,63
Total écrit (note sur 40)	10	29	15,13	4,23	14,50

Les caractéristiques descriptives des notes à l'épreuve écrite des 84 candidats

## 4.2 Répartition des notes des épreuves orales

Les caractéristiques descriptives de chaque épreuve orale des 133 candidats

Epreuve	Min	Max	Moyenne	Ecart-type	la médiane
Algèbre et géométrie (notes sur 80)	2	72	29	18,12	28
Analyse et probabilités (notes sur 80)	00	66	32,50	13,03	31
Modélisation et calcul scientifique (sur 80)	8	76	36 ,31	19,33	36
Total oral (note sur 240)	28	209	99,23	42,45	94

Les caractéristiques descriptives des notes à l'épreuve orale

Les caractéristiques descriptives de chaque épreuve orale des 84 candidats ayant obtenu, dans les épreuves écrites, une note  $\geq 05/20$

Epreuve	Min	Max	Moyenne	Ecart-type	la médiane
Algèbre et géométrie (notes sur 80)	4	72	36,41	17,32	40
Analyse et probabilités (notes sur 80)	15	66	37,57	12,09	36
Modélisation et calcul scientifique (sur 80)	8	76	41,53	19,11	40
Total oral (note sur 240)	46	209	116,47	38,36	116

Les caractéristiques descriptives des notes à l'épreuve orale des 84 candidats

### 4.2.1 Bilan des épreuves écrites et comparaison : de 2017 à 2021

Nous adoptons les abréviations suivantes :

- AG : Algèbre et Géométrie
- AP : Analyse et Probabilités
- MCS : Modélisation et Calcul Scientifique

Effectifs détaillés des candidats aux épreuves écrites de 2017 à 2021

Année	2017		2018		2019		2020		2021	
	MG	AP								
Inscrits	117	117	170	170	191	191	191	182	301	301
Présents	65	65	107	107	128	128	128	125	133	133
Absents	52	52	63	63	63	63	57	57	168	168

Effectifs des candidats aux épreuves écrites de 2017 à 2021

La moyenne générale, des épreuves écrites par matières, des candidats marocains admissibles est comme suit :

Année	2017		2018		2019		2020		2021	
	MG	AP								
Admissibles	43		70		65		64		133	
Epreuve	MG	AP								
Moyenne sur 20	9,82	8,79	7,28	8,14	6,8	7,64	6,87	8,42	5,75	6,28

La moyenne générale, des épreuves écrites par matières, des candidats admissibles

**La moyenne générale, des épreuves écrites par matières, des candidats admissibles avec une moyenne  $\geq 05/20$  est comme suit :**

Année	2017		2018		2019		2020		2021	
Admissibles	43		70		65		64		84	
Epreuve	MG	AP								
Moyenne sur 20	9,82	8,79	7,28	8,14	6,8	7,64	6,87	8,42	7,22	7,90

La moyenne générale, des épreuves écrites par matières, des candidats admissibles ayant une moyenne  $\geq 05/20$

**La moyenne générale des épreuves écrites des candidats marocains admissibles est comme suit :**

Année	2017	2018	2019	2020	2021
Admissibles	43	70	65	64	133
Moyenne des épreuves sur 20	7,71	7,22	7,55	7,65	6,02

**La moyenne générale des épreuves écrites des candidats marocains admissibles ayant une moyenne  $\geq 05/20$  est comme suit :**

Année	2017	2018	2019	2020	2021
Admissibles	43	70	65	64	84
Moyenne des épreuves sur 20	7,71	7,22	7,55	7,65	7,56

#### 4.2.2 Bilan des épreuves orales et comparaison : de 2017 à 2021

**La moyenne générale sur 80 des épreuves orales par matière des candidats admissibles est comme suit :**

Année	2017			2018			2019			2020			2021		
	MCS	AG	AP	MCS	AG	AP	MCS	AG	AP	MCS	AG	AP	MCS	AG	AP
Présents	25	43	43	43	63	63	63	61	61	61	60	59	117	118	119
Moyenne sur 80	31,4	40,87	34,10	31,4	44,49	35,16	34,73	35,55	39,95	34,68	35,59	41,19	36,31	29	32,50

**La moyenne générale sur 80 des épreuves orales par matière des candidats admissibles, ayant une moyenne  $\geq 05/20$ , est comme suit :**

Année	2017			2018			2019			2020			2021		
	MCS	AG	AP	MCS	AG	AP	MCS	AG	AP	MCS	AG	AP	MCS	AG	AP
Présents	25	43	43	43	63	63	63	61	61	61	60	59	74	74	75
Moyenne sur 80	31,4	40,87	34,10	31,4	44,49	35,16	34,73	35,55	39,95	34,68	35,59	41,19	41,53	36,41	37,57

**La moyenne générale des épreuves orales des candidats admissibles est comme suit:**

Année	2017	2018	2019	2020	2021
Admissibles	38	63	65	64	133
Moyenne des épreuves sur 80	35,45	38,13	36,80	37,15	29,56

La moyenne générale des épreuves orales des candidats admissibles, ayant une moyenne  $\geq 05/20$ , est comme suit :

Année	2017	2018	2019	2020	2021
Admissibles	38	63	65	64	84
Moyenne des épreuves sur 80	35,45	38,13	36,80	37,15	35,32

La moyenne générale des épreuves orales par matière des candidats admis est comme suit :

Année	2017			2018			2019			2020			2021		
Nombre d'admis	15			20			23			29			37		
Epreuve	AG	AP	MCS	AG	AP	MCS	AG	AP	MCS	AG	AP	MCS	AG	AP	MCS
Moyenne sur 80	53,07	49,27	40,07	56,2	42,8	49,3	46,17	47,74	50,30	44,48	46,14	45,69	47,44	44,15	54,64

La moyenne générale des candidats admis est comme suit :

Année	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021
Admis	07	09	17	15	20	23	29	37
Moyenne des épreuves sur 80	45,09	46,81	44,29	47,47	42,72	43,48	45,44	43,12

### Statistiques concernant les candidats admis

Résultats	Épreuves écrites			Épreuves orales				Total G	Moyenne G sur 20
Épreuve	MG	AP	Total E	AG	AP	MCS	Total O		
Min	4,25	6	44	3	5	6,5	98	168	8,4
Max	15,75	13,25	116	18	16,5	19	209	325	16,25
Moyenne	8,23	9,12	69,38	11,75	11,04	13,5	146,23	215,62	10,78

avec

- Total E est le total des épreuves écrites sur 160
- Total O est le total des épreuves orales sur 240
- Total G est le total général des épreuves écrites et orales sur 400
- Moyenne G est la moyenne générale des épreuves écrites et orales sur 20

### 4.3 Evolution du nombre de candidats

Tableau récapitulatif des candidats admis à l'agrégation de mathématiques depuis la création de l'agrégation

Année	Nombre de Candidats Marocains	Nombre de Candidats Admis
1988	8	3
1989	17	10
1990	29	16
1991	28	21
1992	27	24
1993	24	19
1994	24	19
1995	32	20
1996	36	20
1997	22	15
1998	28	11
1999	34	18
2000	37	13
2001	44	16
2002	38	16
2003	37	18
2004	34	14
2005	25	11
2006	38	08
2007	55	08
2008	64	16
2009	39	13
2010	28	02
2011	35	04
2012	77	06
2013	63	11
2014	61	07
2015	93	09
2016	47	17
2017	63	15
2018	107	20
2019	191	23
2020	182	29
2021	301	37



# Chapitre 5

## Déroulement des épreuves orales

Ce chapitre précise l'organisation des épreuves orales, les attentes du jury et donne des conseils permettant la mise en valeur des compétences et de la motivation des candidats; les modalités des déroulements des examens oraux qui sont formalisées et structurées pour que les candidats puissent se préparer, effectuer efficacement leur prestation et être à l'aise aux épreuves orales.

### 5.1 Epreuve d'algèbre et géométrie

#### 5.1.1 Modalités

Le candidat reçoit son enveloppe dans laquelle il y a deux sujets parmi une liste d'une cinquantaine de sujets connus à l'avance. Il choisit un des sujets et dispose de trois heures (3h) pour le préparer. Durant cette préparation le candidat peut utiliser les livres de la bibliothèque de l'agrégation mais n'a pas accès à l'Internet ni à tout autre objet électronique.

Le candidat peut disposer de ses propres livres sous deux conditions :

- Les livres doivent être autorisés par le jury (en particulier ne pas être annotés) et
- Les livres doivent être déposés dans la salle de préparation pour être à la disposition de tous les candidats, pendant toute la durée de l'oral.

Le jury procède à la photocopie des plans préparés par les candidats qui doivent être manuscrits, comportent 3 pages A4 au maximum et possèdent une marge de 1cm sur tous les côtés afin d'éviter tout problème lors de la photocopie. Il est en conseillé de soigner la présentation du plan écrit, de mettre des titres, d'encadrer les formules, etc.. Les plans peuvent être complétés par une quatrième page consacrée aux figures. Il faut noter clairement, sur le plan, les développements proposés. Le candidat peut utiliser sa copie du plan pendant toute l'épreuve et pourra utiliser les notes manuscrites qu'il avait produit durant la préparation. L'épreuve s'organise en trois temps, prévus pour une durée totale d'un maximum de 60 minutes environ: une présentation du plan de 10 minutes, un développement de 20 minutes maximum et enfin une partie consacrée aux questions des membres de jury.

#### **Première partie : présentation du plan**

Le candidat est convié à utiliser son temps de parole (10 minutes maximum) pour présenter, argumenter et faire une synthèse de son plan. Ce dernier doit être bien structuré: il définit avec précision les notions introduites, donne les énoncés complets des résultats fondamentaux et cite des exemples et des applications. Comme le jury possède une copie du texte, il est inutile de recopier le plan au tableau. Toutefois il peut être pertinent d'utiliser le tableau pour écrire l'architecture du plan, les théorèmes importants ou un exemple

significatif, voire faire un dessin. Le candidat peut faire un bref exposé introductif et commenter utilement ensuite les résultats principaux, les outils développés, l'organisation d'ensemble et les méthodes utilisées. La présentation orale, l'organisation et la cohérence globale du plan écrit constituent des éléments importants d'appréciation.

### **Deuxième partie : le développement**

Le jury veille à la cohérence du plan et des propositions de développements. Il est important que le candidat propose au moins deux développements en adéquation avec la leçon, et qui soient compatibles avec le programme de l'agrégation. Les résultats utilisés pour mener à bien le développement doivent être clairement cités dans le plan présenté par le candidat. Le souci pédagogique, la pertinence des explications, la capacité à mener à bien et complètement le développement dans le temps imparti sont des éléments importants d'appréciation. Par ailleurs, le candidat doit s'attendre à être interrogé lors de la période de discussion sur des applications ou illustrations élémentaires de son développement. Les résultats utilisés pour mener à bien le développement doivent être clairement cités dans le plan présenté par le candidat.

### **Troisième partie : questions des membres du jury**

Le jury vérifie systématiquement la maîtrise du plan présenté. Une part importante de la discussion sera autour du plan. Le candidat doit s'attendre à ce que le jury lui pose éventuellement des exercices en rapport avec la leçon afin d'apprécier la qualité de son raisonnement et son analyse. Les réponses aux questions, l'utilisation du plan écrit et l'écoute dont le candidat fait preuve sont des éléments importants de notation.

#### **5.1.2 Remarques et recommandations**

Notons d'abord que le nombre des candidats ayant choisi des sujets d'algèbre linéaire reste significatif environ 60% contre 40% qui ont choisi des sujets portant sur les structures d'anneaux et de corps. Il est à signaler qu'aucun candidat n'a choisi de leçon de géométrie. Sur le déroulement de l'épreuve orale d'algèbre et géométrie, le jury tient à signaler les remarques suivantes:

- Le plan: En général, la durée impartie (10 minutes) a été respectée. Par contre, plusieurs candidats n'ont pas bien structuré le plan. Le jury a aussi constaté une carence au niveau des exemples et des applications.
- Le développement: Environ 30% des candidats n'ont proposé qu'un seul développement. Parmi les 70% restants, certains ont proposé des développements non consistants ou en dehors de la leçon choisie. Le jury a été amené de demander aux candidats, n'ayant pas respecté le temps prévu pour le développement, de décrire oralement les étapes restantes de la démonstration.
- Questions des membres du jury: Certains candidats ont consacré plus temps au développement au détriment de la maîtrise de la leçon et parfois même au détriment des notions les plus basiques relatives au sujet.

D'autre part, le jury a constaté que les étudiants admis ont un bon niveau en Algèbre et Géométrie. Par ailleurs, il recommande aux candidats de:

- Présenter un plan bien structuré (respecter l'enchaînement des paragraphes, éviter les répétitions) et bien riche (présenter les notions de base relatives à la leçon, les résultats fondamentaux, donner des exemples et des applications)

- Proposer au moins deux développements bien solides et en relation étroite avec la leçon (éviter les développements passe-partout). Veiller à l'aboutissement du développement et le respect de la durée accordée, le cas échéant le candidat est automatiquement pénalisé.
- Éviter d'admettre des résultats majeurs dans le plan qui, une fois acquis l'objet du développement devient trivial et dépourvu de toute importance.
- Montrer une maîtrise de la leçon et veiller à répondre et avec rigueur aux questions posées par le jury.
- Porter plus d'effort pour combler le manque remarquable dans les notions de géométrie et leurs applications.

## 5.2 Epreuve d'analyse et probabilités :

### 5.2.1 Modalités

Les modalités pratiques sont les mêmes que celles de l'oral d'Algèbre et Géométrie. L'épreuve orale d'analyse et probabilités dure au maximum une heure et est composée de trois parties. La première, durant laquelle le candidat présente le plan de la leçon, est prévue en 10 minutes au maximum. Dans la deuxième phase le candidat doit proposer au moins deux développements et qu'il soit en mesure de les mener à bien dans les 20 minutes consacrées à cette partie. Le candidat doit aussi être capable de justifier toutes les étapes et de donner des explications sur l'approche adoptée ainsi que des exemples illustrant les notions développées. Les trente minutes restantes sont consacrées à l'entretien avec le jury qu'il a pour objectif de s'assurer de la maîtrise par le candidat du plan présenté et des outils de bases utilisés dans son développement et de vérifier sa capacité à bien réagir à des questions en lien avec le sujet de la leçon. Dans cette dernière étape de l'épreuve, le candidat doit donc se préparer à des questions sur tout énoncé présenté dans son plan ainsi qu'aux questions sur des applications de son développement. Questions auxquelles il doit répondre avec précision. Il est donc essentiel qu'il soit capable de reconnaître dans une question donnée un cas particulier du résultat général présenté dans son développement. Pour cela il doit mettre en œuvre des énoncés sur des situations simples et aussi réfléchir à des exemples ou des contre-exemples lors de sa préparation.

### 5.2.2 Remarques et recommandations

Le jury tient à noter que le niveau des étudiants était très hétérogène et cela est dû au fait que plusieurs candidats convoqués à l'oral avaient une moyenne, aux épreuves écrites, inférieure au seuil exigé habituellement. Il a constaté une progression du niveau de certains candidats que ce soit au niveau de la présentation ou lors des réponses aux questions. Par contre quelques candidats se sont contentés de réciter de manière linéaire leurs plans avec des réponses non précises à des questions pourtant élémentaires. Signalons aussi que certains candidats manipulent des objets mathématiques dont ils ignorent la signification exacte.

Nous recommandons aux candidats de consulter les différents rapports du jury de l'agrégation. Les meilleurs candidats ont su faire preuve d'une bonne connaissance des outils mathématiques utilisés ainsi que d'une démarche réfléchie et lucide lors de leur passage. Le jury a été sensible à l'effort important fourni par quelques candidats et par l'originalité des développements qu'ils ont proposé.

## 5.3 Epreuve de modélisation et calcul scientifique :

### 5.3.1 Modalités

L'épreuve orale de modélisation est préparée par le candidat en quatre heures et dure environ une heure. Le candidat a le choix entre un texte et une leçon.

#### Première partie : présentation du plan

Le candidat dispose de dix minutes pour présenter son plan en y précisant les points qu'il propose comme développements éventuels. Il est vivement souhaitable que le candidat propose au moins deux développements. Le délai de dix minutes a été en général respecté par les candidats. La majorité d'entre eux a choisi le texte. Le jury a toutefois relevé que certains candidats manquent de rigueur et de clarté dans les plans qu'ils présentent. Il a aussi constaté que la tendance générale est de présenter un seul développement.

#### Deuxième partie : le développement

Le développement choisi par le jury doit être présenté en 20 mn durant lesquelles le candidat n'est pas interrompu. Le jury a remarqué que ce délai n'est pas respecté par quelques candidats, soit parce que le développement proposé manque de consistance, auquel cas il est traité en moins de dix minutes, soit parce que le développement est mal maîtrisé par le candidat, et dans ce cas il y a un dépassement du temps accordées. Le jury est amené alors à demander au candidat de conclure, ce qui le pénalise.

Une spécificité importante de l'épreuve de modélisation est que le candidat est tenu de présenter un développement informatif en relation avec le texte ou la leçon choisi.

#### Troisième partie : questions des membres du jury

La troisième phase de l'épreuve est réservée aux discussions et interrogations des membres de la commission. Ce moment d'interaction offre au jury l'occasion de

1. s'assurer de la bonne maîtrise du thème que le candidat a proposé comme développement et de discuter de son lien avec le texte, ou la leçon, choisi,
2. tester à quel point le candidat maîtrise les concepts présentés dans son plan,
3. poser des questions en relation directe avec le texte ou la leçon choisi par le candidat. Ces questions concernent aussi les éventuels développements informatifs présentés par le candidat.

### 5.3.2 Remarques et recommandations

Pour les remarques d'ordre général sur le déroulement de l'épreuve orale de modélisation, la commission soulève les points suivants :

1. Un bon nombre de candidats ne propose aucun développement informatif et se contente de proposer un développement théorique.
2. Certains candidats proposent un seul développement au jury. Dans le cas où ils en proposent deux, l'un des deux sujets manque de consistance.
3. Il est préférable de traiter une portion du texte en se basant sur des arguments mathématiques solides et des simulations pertinentes que de traiter l'intégralité du texte de manière vague.

# Chapitre 6

## Listes des leçons

Les listes des leçons sont données à titre indicatif : le jury se réserve le droit de proposer d'autres leçons ou de changer la formulation des leçons figurant sur les listes. Une grande partie de ces leçons seront reprises pour la session 2020, des modifications et des évolutions sont possibles. Il est conseillé aux candidats de lire avec la plus grande attention l'intitulé de la leçon.

### 6.1 Liste des leçons d'Algèbre et Géométrie

1. Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.
2. Groupe des nombres complexes de module 1. Sous-groupes des racines de l'unité. Applications.
3. Sous-groupes distingués et de groupes quotients. Exemples et applications.
4. Groupes finis. Exemples et applications.
5. Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.
6. Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie  $E$ , sous-groupes de  $GL(E)$ . Applications.
7. Représentations et caractères d'un groupe fini sur un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel.
8. Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications.
9. Représentations de groupes finis de petit cardinal.
10. Caractères d'un groupe abélien fini et transformée de fourier discrète. Applications.
11. Anneau  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  et groupe  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ . Applications.
12. Nombres premiers. Applications.
13. Anneaux principaux. Applications.
14. Corps finis. Applications.
15. Anneau des séries formelles. Applications.
16. Extensions de corps. Exemples et applications.
17. Exemples d'équations diophantiennes.
18. Droite projective et birapport.

19. Corps des fractions rationnelles à une indéterminée sur un corps commutatif. Applications.
20. Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.
21. Algèbre des polynômes à plusieurs indéterminées. Applications.
22. Racines d'un polynôme. Fonctions symétriques élémentaires. Localisation des racines dans les cas réel et complexe.
23. Actions de groupes sur les espaces de matrices. Exemples et applications.
24. Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang.
25. Déterminant. Exemples et applications.
26. Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.
27. Sous-espaces stables par une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.
28. Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.
29. Exponentielle de matrices. Applications.
30. Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.
31. Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.
32. Formes linéaires et hyperplans en dimension finie. Exemples et applications.
33. Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dimension finie).
34. Isométries d'un espace affine euclidien de dimension finie. Forme réduite. Applications en dimensions 2 et 3.
35. Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité, isotropie. Applications.
36. Formes quadratiques réelles. Exemples et applications.
37. Coniques. Applications.
38. Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie, convexité. Applications.
39. Applications des nombres complexes à la géométrie. Homographies
40. Utilisation des groupes en géométrie.
41. Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.
42. Groupes abéliens finis.
43. Sous-groupes finis de  $O^+(2)$  et  $O^+(3)$ .
44. Matrices équivalentes et semblables.

45. Résolution d'un système d'équations linéaires. Algorithmes et complexité.
46. Opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes d'une matrice. Applications.
47. Groupes quotients finis et théorèmes d'isomorphismes.
48. Espaces vectoriels quotients finis et théorèmes d'isomorphismes.

## 6.2 Liste des Leçons d'Analyse et Probabilités

1. Espaces de fonctions : exemples et applications.
2. Exemples de parties denses et applications.
3. Utilisation de la notion de compacité.
4. Connexité. Exemples et applications.
5. Espaces complets. Exemples et applications.
6. Théorèmes du point fixe. Exemples et applications.
7. Prolongement de fonctions. Exemples et applications.
8. Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.
9. Espaces de HILBERT. Bases hilbertiennes. Exemples et applications.
10. Approximation d'une fonction par des polynômes et des polynômes trigonométriques. Exemples et applications.
11. Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Exemples et applications.
12. Applications différentiables définies sur un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . Exemples et applications
13. Applications des formules de TAYLOR.
14. Problèmes d'extremums. Extremums : existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications
15. Équations différentielles  $X' = f(t, X)$ . Exemples d'études qualitatives des solutions.
16. Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.
17. Exemple d'équations aux dérivées partielles linéaires.
18. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications
19. Comportement asymptotique de suites numériques. Rapidité de convergence. Exemples.
20. Comportement d'une suite réelle ou vectorielle définie par une itération  $u_{n+1} = f(u_n)$ . Exemples.
21. Continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et contre-exemples.
22. Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.

23. Fonctions à variations bornées et mesure de Stieljes, Exemples et applications.
24. Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.
25. Méthodes d'approximation des solutions d'une équation  $F(X) = 0$ . Exemples.
26. Espaces  $L^p$ ,  $1 \leq p \leq +\infty$ .
27. Suites et séries de fonctions intégrables. Exemples et applications.
28. Illustrer, par des exemples, quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou de plusieurs variables réelles.
29. Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.
30. Produit de convolution, transformation de FOURIER. Applications.
31. Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.
32. Convergence des séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.
33. Fonctions holomorphes et méromorphes sur un ouvert de  $\mathbb{C}$ . Exemples et applications.
34. Séries de FOURIER. Exemples et applications.
35. Exemples de problèmes d'interversion de limites.
36. Vecteurs aléatoires et indépendance.
37. Indépendance d'événements et de variables aléatoires. Exemples.
38. Loi des grands nombres. Théorème central limite. Applications.
39. Fonctions de répartitions. Propriétés et applications.
40. Fonction caractéristique et transformée de Laplace d'une variable aléatoire. Propriété, exemples et applications.
41. Modes de convergence d'une suite de variables aléatoires (convergence en loi, convergence en probabilité et convergence presque sûr).
42. Variables aléatoires à densité. Exemples et applications.
43. Variables aléatoires discrètes. Exemples et applications.
44. Utilisation de la notion de convexité en analyse.

### 6.3 Liste des leçons de modélisation et calcul scientifique

1. Calcul numérique : intégration, différentiation, sommation, résolution d'équations algébriques ou différentielles.
2. Applications des formules de TAYLOR à une ou plusieurs variables.

3. Méthodes numériques pour les systèmes linéaires : conditionnement, factorisation LU, méthode du gradient pour systèmes d'équations linéaires symétriques définis positifs. Recherche de valeurs propres (méthode de la puissance). Moindres carrés linéaires sans contraintes.
4. Résolution de systèmes d'équations non linéaires : Méthode de Newton, vitesse de convergence, estimation de l'erreur.
5. Equations différentielles ordinaires : Méthodes d'Euler explicite et implicite. Consistance, stabilité, convergence, ordre.
6. Probabilités : lois de variables aléatoires discrètes et à densité. Méthodes de simulation de variables aléatoires de lois données, en particulier pour les lois classiques : binomiale, géométrique, Poisson, exponentielle, gaussienne, gamma.
7. Chaînes de Markov homogènes à espace d'états fini : irréductibilité, apériodicité, classification des états, théorème de Perron-Frobenius, convergence.
8. Calcul matriciel : opérations élémentaires sur lignes et sur colonnes, méthode du pivot de Gauss.
9. Polynômes à une indéterminée : évaluation (Horner), interpolation (Lagrange), localisation des racines dans  $\mathbb{R}$  et dans  $\mathbb{C}$ .
10. Appliquer et comparer des méthodes numériques de recherche de valeurs et vecteurs propres. Applications.
11. PGCD, PPCM, Théorème de Bézout, algorithmes de calcul. Applications.
12. Méthodes de moindres carrés. Applications



# Chapitre 7

## Textes de l'épreuve de modélisation

L'oral du concours de l'Agrégation Marocaine de Mathématique comporte trois épreuves, l'une portant principalement sur les domaines Algèbre-Géométrie, la deuxième principalement sur les domaines Analyse-Probabilités, la troisième sur les problèmes de Modélisation Mathématique. Cette dernière épreuve s'appuie sur des connaissances générales d'Algèbre-Géométrie-Analyse-Probabilités mais elle diffère fondamentalement des deux premières :

- par les objectifs : il s'agit d'étudier des situations concrètes, de réfléchir aux diverses possibilités de traduire mathématiquement une telle situation et de proposer des solutions adaptées
- par la forme de l'épreuve : le candidat tire un sujet contenant un texte scientifique (avec des pistes de réflexion) et un intitulé de leçon de calcul scientifique ou formel (orienté vers la modélisation). Il choisit le texte ou la leçon et dispose de quatre heures pour préparer son passage devant le jury.
- par les outils mis à sa disposition pendant les quatre heures de préparation : le candidat travaille à l'aide des livres de la bibliothèque de l'Agrégation ou de ses propres livres s'ils sont autorisés par le jury. Il dispose aussi d'un ordinateur équipé de divers logiciels mathématiques.

À l'issue de sa préparation, le candidat présente les fruits de sa réflexion au jury, pendant environ une heure et quart. On attend de lui qu'il

1. présente la modélisation mise en oeuvre dans le texte ou la leçon, ce qu'il en a compris
2. détaille certains résultats mathématiques utiles pour le sujet étudié
3. discute les hypothèses introduites par le texte ou les hypothèses choisies pour la leçon
4. montre l'exploitation possible du sujet dans une séquence pédagogique (on peut penser aux TIPE des classes préparatoires, aux travaux personnels des classes terminales de lycées)
5. présente un ou plusieurs programmes informatiques qui sont utiles dans la résolution de problèmes introduits par le sujet et qui illustrent les résultats obtenus

Lors des vingt dernières minutes de l'interrogation orale, le jury pose des questions diverses en relation avec le sujet. Il peut revenir sur des points peu clairs de la présentation ou proposer d'autres approches de la situation étudiée, d'autres pistes de travail.

Lors des oraux de Modélisation Mathématique 2016 le jury a noté que

- les candidats ont, pour la plupart, préparé avec sérieux cette épreuve très particulière de l'Oral
- certains candidats ont utilisé efficacement l'ordinateur et les logiciels mis à disposition; les candidats qui refusent l'usage de l'outil informatique
- la moyenne des notes est environ 8/20 et l'écart-type environ 3,5. Pour les sept candidats qui ont choisi la leçon, la moyenne est 26,5/80.
- les notes vraiment faibles résultent d'une compréhension insuffisante du sujet, de connaissances mathématiques mal assurées, de résultats erronés ou illogiques, de l'absence d'illustration informatique voire du refus d'utiliser l'ordinateur.

## 7.1 Texte 1 de l'épreuve de modélisation

Le jury n'exige pas une compréhension exhaustive du texte. Vous êtes libres d'organiser votre discussion comme vous l'entendez. Des suggestions de développement, largement indépendantes les unes des autres, vous sont proposées en fin de texte. Ce ne sont que des suggestions et vous n'êtes pas tenu(e) de les suivre. Il vous est conseillé de mettre en lumière vos connaissances à partir du fil conducteur constitué par le texte. Le jury appréciera que la discussion soit accompagnée d'exemples traités sur ordinateur.

### 7.1.1 Introduction, l'image numérique

L'intérêt des images numériques à côté des images analogiques est une évidence depuis la fin du vingtième siècle. Elles permettent un travail efficace et simple aussi bien pour le stockage (compression), que pour le traitement ou l'analyse (par des moyens informatiques).

Une image numérique est obtenue en captant la lumière provenant d'une scène ou d'un document par des capteurs électroniques, les CCD (charge couple device). Ces capteurs convertissent le signal lumineux en données numériques. Ces données sont organisées en tableaux à double entrée (horizontal, vertical), i.e. en matrices. Chaque terme de la matrice donne l'information lumineuse provenant d'une zone physique de la scène, du document. Le terme  $m_{i,j}$  correspond à la zone rectangulaire  $[a, b] \times [c, d]$ , est subdivisée en petits rectangles

$$\left[ a + \frac{(i-1/2)(b-a)}{n}, a + \frac{(i+1/2)(b-a)}{n} \right] \times \left[ c + \frac{(j-1/2)(d-c)}{p}, c + \frac{(j+1/2)(d-c)}{p} \right].$$

On parle de pixel (picture element).

Les images numériques présentent un aspect discret, à l'opposé de la scène (ou document) d'origine qui est de caractère continu. L'aspect discret provient d'abord d'une discrétisation spatiale, remplacement d'une zone rectangulaire par un couple d'entiers  $(i, j)$ . Il provient aussi de la quantification des intensités lumineuses, les termes de la matrice sont choisis dans un intervalle entier,  $[[0, 255]]$  par exemple, s'il y a une seule couleur ou bien des niveaux de gris. Il faut trois matrices pour rendre compte des couleurs réelles, en utilisant le système trichromatique RGB par exemple (RGB= red, green, blue).

### 7.1.2 Analyse élémentaire de l'image numérique

On considère ici une image numérique en niveaux de gris, donnée par une matrice  $M$  carrée d'ordre 512 dont les termes sont éléments de  $[[0, 255]]$ . Un des premiers indicateurs utiles sur l'image est la répartition des niveaux de gris, c'est à dire un vecteur ligne  $R = (n_0, \dots, n_{255})$  où  $n_k$  est le nombre de pixels d'intensité

$k$  (i.e. de termes de  $M$  valant  $k$ ). En regroupant les niveaux en classes adjacentes (par exemple 32 segments de longueur 8) on simplifie le travail ultérieur (la répartition devient un vecteur ligne de taille 16), sans perte importante d'information. On représente graphiquement cette répartition, on dispose ainsi d'un histogramme de l'image.

Cette répartition donne une idée du contraste de l'intensité dans l'image. Des transformations simples permettent d'améliorer le contraste, par exemple de rendre plus uniforme la répartition, d'étaler son support.

La recherche des  $(i, j)$  où l'intensité varie brusquement permet d'identifier les contours des objets présents dans la scène ou le document. Les plages d'indice où l'intensité varie peu, ou bien varie régulièrement - avec des répétitions - identifie des objets ou des parties d'objet présentant une texture particulière. On parle d'analyse de contours et d'analyse de textures.

### 7.1.3 Compression d'image numérique par SVD

On note  $I(M)$  la quantité d'information portée par une image  $M$ . Dans le cas d'une image en niveaux de gris, avec  $M$  carrée d'ordre 512 dont les termes appartiennent à  $[[0,255]]$ ,  $I(M)$  est de l'ordre de  $512^2 \times 8$  (les termes  $m_{i,j}$  sont écrits en base 2), approximativement  $\boxed{2,36 \cdot 10^6}$ . Comprimer une image  $M$  consiste à la remplacer par une autre image  $M'$  proche de  $M$  - l'idéal étant qu'un oeil humain confonde pratiquement ces deux images - mais de poids bien inférieur,  $I(M') \ll I(M)$ .

Une technique classiquement utilisée repose sur la notion de valeurs singulières des matrices. Le théorème (Beltrami, Jordan, Sylvester ... puis Eckart-Young) s'énonce : pour toute matrice réelle  $A$  de taille  $n, p$ , il existe des matrices orthogonales  $U, V_t$  et une matrice  $D$  de taille  $n, p$  telles que

$$i \neq j \Rightarrow d_{i,j} = 0 \text{ et } d_{1,1} \geq d_{2,2} \geq \dots \geq d_{q,q} \geq 0 \tag{7.1.1}$$

où  $q = \min(n, p)$ . L'extension aux matrices complexes est valide, avec  $U, V$  unitaires et  $D$  respectant (7.1.1). Les  $d_{i,i}$  sont analogues à des niveaux d'énergie, correspondant aux vecteurs d'une nouvelle base, ils sont positifs et ordonnés en décroissant. Ils peuvent contenir des répétitions et si les  $k$  derniers sont 0 cela signifie que le rang de  $A$  est  $q - k$ .

En pratique il est courant de trouver un nombre relativement important de  $d_{i,i}$  nuls ou proches de 0. On peut fixe un seuil, par exemple  $s = d_{1,1}/100$ , on considère alors que la matrice  $M' = UD'V_t$  où  $D'$  est obtenue en remplaçant dans  $D$  les  $d_{i,i}$  inférieurs au seuil par 0 donne une image proche de  $M$ . Il est clair que  $I(M')$  est inférieur à  $I(M)$ , voire très inférieur. Par exemple si  $M$  est d'ordre 512 et si la moitié des  $d_{i,i}$  est négligée on obtient

$$M' = \begin{pmatrix} U_1 & U_2 \\ U_3 & U_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 & V_2 \\ V_3 & V_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1\Delta & 0 \\ U_3\Delta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 & V_2 \\ V_3 & V_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1\Delta V_1 & U_1\Delta V_2 \\ U_3\Delta V_1 & U_3\Delta V_2 \end{pmatrix}$$

ce qui limite la quantité d'information à  $4 \times 256^2 + 256 =$  environ  $\boxed{2,62 \cdot 10^5}$ , soit un gain de facteur 10 environ.

### 7.1.4 Extrait d'un sujet de concours CPGE sur la SVD

#### Notations

Soit  $n$  et  $p$  des entiers supérieurs ou égaux à 1.  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$  désigne le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des matrices à coefficients réels ayant  $n$  lignes et  $p$  colonnes. On identifiera  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$  respectivement à  $\mathbb{R}^n$  et

$\mathbb{R}^p$  que l'on supposera munis de leurs produits scalaires canoniques notés respectivement  $\langle \cdot | \cdot \rangle_n$  et  $\langle \cdot | \cdot \rangle_p$ . Les normes associées seront notées respectivement  $\| \cdot \|_n$  et  $\| \cdot \|_p$ .

On notera  $(E_i)_{1 \leq i \leq p}$  la base canonique de  $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$  et  $(F_j)_{1 \leq j \leq n}$  celle de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ .

Lorsque  $p = n$ ,  $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$  est noté plus simplement  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et est muni de sa structure d'algèbre,  $I_n$  représentant la matrice identité. On écrit  $0_{n,p}$  pour la matrice nulle de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$  et  $0_n$  pour la matrice nulle de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

Pour  $A$  appartenant à  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ ,  ${}^tA$  désigne la matrice transposée de  $A$  : c'est un élément de  $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ .  $\text{Ker } A$  désigne est le noyau de  $A$ ,  $\text{Im } A$  l'image de  $A$ . Le noyau de  $A$  est  $\{X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 0\}$ , noté  $\text{Ker } A$ , l'image de  $A$  est  $\{AX \mid X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})\}$ , notée  $\text{Im } A$ . On note  $F^\perp$  l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel  $F$  d'un espace euclidien.

### Partie I

Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ .

**I.1.** Montrer que  ${}^tAA$  est nulle si et seulement si  $A$  est nulle.

Dans toute la suite du problème  $A$  sera supposée non nulle.

**I.2.** Montrer que les matrices  ${}^tAA$  et  $A{}^tA$  sont diagonalisables au moyen de matrices orthogonales.

**I.1.a)**  $X, Y$  désignant deux éléments de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ , exprimer le produit scalaire  $\langle X \mid Y \rangle_n$  sous la forme d'un produit matriciel.

**b)** Si  $W$  est un vecteur propre de  ${}^tAA$  associé à la valeur propre  $\lambda$ , exprimer  $\|AW\|_n^2$  en fonction de  $\lambda$  et  $\|W\|_p$ .

**c)** En déduire que les valeurs propres de  ${}^tAA$  sont réelles, positives ou nulles.

**I.4.a)** Pour  $x$  réel, calculer les produits matriciels par bloc suivants:

$$\begin{pmatrix} xI_n & A \\ {}^tA & I_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -I_n & 0_{n,p} \\ {}^tA & I_p \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} xI_n & A \\ {}^tA & I_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -I_n & A \\ 0_{p,n} & -xI_p \end{pmatrix}$$

**b)** En déduire que les matrices  ${}^tAA$  et  $A{}^tA$  ont les mêmes valeurs propres non nulles avec le même ordre de multiplicité.

**c)** En déduire également que les matrices  ${}^tAA$  et  $A{}^tA$  ont même rang.

**I.5.** Montrer que si  $n > p$ , 0 est valeur propre de  $A{}^tA$  et que si  $n < p$ , 0 est valeur propre de  ${}^tAA$ .

**I.6.** On note  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$  les valeurs propres de  ${}^tAA$ , chaque valeur propre apparaissant dans cette liste un nombre de fois égal à son ordre de multiplicité et on pose  $\mu_i = \sqrt{\lambda_i}$  pour tout  $i$  élément de  $\{1, 2, \dots, p\}$ .

*Les réels  $\mu_i$  sont appelés valeurs singulières de  $A$ .*

On suppose les réels  $\lambda_i$  ordonnés tels que  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_p \geq 0$ .

**a)** Montrer que  $\lambda_1$  est non nul.

On définit alors un unique entier naturel  $r$  appartenant à  $\{1, 2, \dots, p\}$  comme suit : si toutes les valeurs propres de  ${}^tAA$  sont non nulles,  $r = p$ , sinon  $r$  est tel que pour tout  $i \leq r$ ,  $\lambda_i > 0$  et pour tout  $i > r$ ,  $\lambda_i = 0$ .

Soit  $(V_1, V_2, \dots, V_p)$  une base orthonormale de vecteurs propres de  ${}^tAA$  respectivement associés aux valeurs propres  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$  ;  $V_1, V_2, \dots, V_r$  désignent les vecteurs propres associés aux valeurs propres non nulles et lorsque  $r$  est strictement inférieur à  $p$ ,  $V_{r+1}, \dots, V_p$  désignent les vecteurs propres associés à la valeur propre 0.

**b)** Montrer que  $r \leq n$  et que la dimension de  $\text{Ker } A{}^tA$  est égale à  $n - r$ .

Pour tout  $i \in \{1, 2, \dots, r\}$ , on pose  $U_i = \frac{1}{\mu_i} AV_i$  et si  $n > r$ , on désigne par  $(U_{r+1}, \dots, U_n)$  une base orthonormale de  $\text{Ker } A{}^tA$ .

**c)** Montrer que pour tout  $i \in \{1, 2, \dots, r\}$ ,  $AV_i = \mu_i U_i$  et que si  $r$  est strictement inférieur à  $p$ , pour tout  $i \in \{r+1, \dots, p\}$ ,  $AV_i = 0$ .

**d)** Montrer que pour tout  $i \in \{1, 2, \dots, r\}$ ,  ${}^tAU_i = \mu_i V_i$ .

e) Montrer que si  $n > r$ , pour tout  $i \in \{r + 1, \dots, n\}$ ,  ${}^tAU_i = 0$ .

f) En déduire que le système de vecteurs  $(U_1, U_2, \dots, U_n)$  constitue une base orthonormale de vecteurs propres de  $A^tA$  et préciser la valeur propre associée à chaque vecteur  $U_i$ .

**I.7.** On note  $V$  la matrice carrée réelle d'ordre  $p$  dont le  $i^{\text{ème}}$  vecteur colonne est le vecteur  $V_i$ ,  $U$  la matrice carrée réelle d'ordre  $n$  dont le  $j^{\text{ème}}$  vecteur colonne est le vecteur  $U_j$  et  $({}^tUAV)_{i,j}$  l'élément de la  $i^{\text{ème}}$  ligne,  $j^{\text{ème}}$  colonne de la matrice  ${}^tUAV$ .

a) Montrer que :

$$\forall (i, j) \in \{1, 2, \dots, n\} \times \{1, 2, \dots, p\}, ({}^tUAV)_{i,j} = \mu_j \delta_{i,j} \quad \text{où} \quad \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

b) On note  $\Delta$  la matrice appartenant à  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$  dont tous les éléments  $\Delta_{i,j}$  sont nuls sauf  $\Delta_{11}, \Delta_{22}, \dots, \Delta_{rr}$  respectivement égaux à  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r$ . Montrer que  $A = U\Delta^tV$ .

La factorisation de  $A$  ainsi obtenue est dite décomposition de  $A$  en valeurs singulières.

c) Trouver une décomposition en valeurs singulières de chacune des matrices :

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

**I.8.** Montrer que le rang de  $A$  est égal à  $r$ .

**I.9.a)** Montrer que  $V = \sum_{i=1}^p V_i {}^tE_i$ .

b) En déduire :  $A = \sum_{i=1}^r \mu_i U_i {}^tV_i$  ,  ${}^tAA = \sum_{i=1}^r \lambda_i V_i {}^tV_i$  ,  $A^tA = \sum_{i=1}^r \lambda_i U_i {}^tU_i$

c) Déterminer les sous-espaces vectoriels suivants :  $\text{Ker } A$ ,  $\text{Ker } {}^tA$ ,  $\text{Im } A$ ,  $\text{Im } {}^tA$ .

d) Montrer que  $\text{Ker } {}^tAA = \text{Ker } A$  et  $\text{Ker } A^tA = \text{Ker } {}^tA$ .

## Partie II

Avec les notations de la partie I, pour  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$  admettant une décomposition en valeurs singulières  $A = U\Delta^tV$ , on appelle  $\Delta^+$  la matrice de  $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$  dont tous les éléments  $\Delta_{i,j}^+$  sont nuls sauf  $\Delta_{11}^+, \Delta_{22}^+, \dots, \Delta_{rr}^+$  respectivement égaux à  $\frac{1}{\mu_1}, \frac{1}{\mu_2}, \dots, \frac{1}{\mu_r}$  et on pose  $A^+ = V(\Delta^+)^tU$ .

$\Delta^+$  (resp.  $A^+$ ) est appelée pseudo-inverse de  $\Delta$  (resp. de  $A$ ). A priori, la matrice  $A^+$  ainsi définie dépend de la décomposition en valeurs singulières choisie pour la matrice  $A$ , mais il sera montré à la question **II.9** qu'il n'en est rien et que  $A^+$  est uniquement déterminée à partir de  $A$ .

1. Déterminer les matrices  $A_0^+$ ,  $A_0A_0^+$ ,  $A_0^+A_0$ ,  $A_0A_0^+A_0$  et  $A_0^+A_0A_0^+$ .

2. Déterminer  $(A_0^+)^+$ .

3. Évaluer  $\Delta^+\Delta$  et  $\Delta\Delta^+$ .

4. Montrer que si  $A$  est une matrice carrée inversible ( $n = p = r$ ), alors  $A^+ = A^{-1}$ .

### 7.1.5 Indications pour le traitement d'images avec des logiciels mathématiques

La plupart des logiciels mathématiques (Maple, Matlab, Scilab, Python ... ) permettent de travailler sur des images. Donnons ci dessous quelques indications pour Scilab :

En Scilab utiliser le module SIVP (menu Modules) qui permet de travailler sur les images numériques. On suppose disposer sur le répertoire courant de Scilab d'une image nomimage.jpg. L'instruction  $M = \text{imread}('nomdim$

fournit une matrice à termes entiers de 0 à 255.

En fait ce sont des entiers modulo 256 et il est pratique de les transformer en entiers ordinaires par la commande `M1=double(M)` // double signifie ici entiers longs

On peut utiliser les commandes usuelles de Scilab et opérer sur  $M1$ . Pour visualiser la matrice  $M2$  finalement obtenue on peut utiliser les commandes du module SIVP ou, plus simplement, les tracés ordinaires par plot et ses variantes. On conseille la séquence d'instructions suivante:

```
z=scf(); // une 'fonction' z est ainsi définie qui permet de jouer sur le graphique courant
grayplot(1:m,n:-1:1,MM) // NB c'est une image en couleurs qui est affichée dans la fenêtre Figure
z.color_map=graycolormap(32); // transforme les couleurs en niveaux de gris.
On l'exporte en fichier .jpg par menu de la fenêtre Figure.
```

### 7.1.6 Suggestions de développement

Ce paragraphe ne contient qu'un petit nombre de suggestions. Vous pouvez choisir d'étudier certains points seulement, de façon plus ou moins approfondie, et pas nécessairement dans l'ordre. Vous pouvez aussi vous poser d'autres questions que celles indiquées ci dessous. Il est vivement souhaité que vos investigations comportent une partie traitée sur ordinateur et, si possible, des représentations graphiques.

#### Aspect mathématique

- Donner une preuve de l'unicité de  $A^+$ , matrice définie au début de la partie 2 du sujet CPGE, matrice qu'on appelle pseudo-inverse de  $A$ . Donner quelques propriétés de la pseudo-inverse.
- Donner des exemples de calcul de décomposition en valeurs singulières en petite dimension.
- En suivant le sujet de concours ou en le modifiant, donner une preuve de la décomposition en valeurs singulières pour une matrice rectangulaire.
- Que donne la SVD de  $A$  si  $A$  est une matrice symétrique, antisymétrique, orthogonale, idempotente, ... ?

#### Aspect modélisation, calcul numérique et algorithmique

- Quel est l'intérêt de modèles numériques pour les images?
- Travailler sur une image présente sur l'ordinateur, déterminer l'histogramme ou d'autres caractéristiques de l'image.
- Proposer un programme informatique permettant de calculer et afficher les contours présents dans une image. Appliquer sur un exemple.
- Appliquer la méthode SVD pour transformer une image  $I$  en une image  $I'$  pratiquement similaire à  $I$  mais de poids bien inférieur (en termes de longueur de fichier). Essayer plusieurs seuils et discuter au vu des images obtenues.

- Modifier une image en lui ajoutant (informatiquement) du bruit. Pour cela on ajoute à la matrice de l'image une matrice dont les termes sont des variables aléatoires indépendantes et de même loi, loi centrée (qui admet une espérance 0). Proposer une méthode, un algorithme, un programme permettant d'éliminer une grande partie du bruit (restauration d'images).
- Proposer un algorithme, un programme donnant la SVD d'une matrice entrée par l'utilisateur (ou chargée à partir d'un fichier).

## 7.2 Texte 2 de l'épreuve de modélisation

Le jury n'exige pas une compréhension exhaustive du texte. Vous êtes libres d'organiser votre discussion comme vous l'entendez. Des suggestions de développement, largement indépendantes les unes des autres, vous sont proposées en fin de texte. Ce ne sont que des suggestions et vous n'êtes pas tenu(e) de les suivre. Il vous est conseillé de mettre en lumière vos connaissances à partir du fil conducteur constitué par le texte. Le jury appréciera que la discussion soit accompagnée d'exemples traités sur ordinateur.

### 7.2.1 Le problème de Dirichlet

On considère un solide homogène, conducteur de chaleur et tel qu'en tout point de la surface extérieure la température ne varie pas. Il est clair que le champ des températures à l'intérieur du solide va évoluer avec le temps jusqu'à atteindre un équilibre thermique.

Les hypothèses raisonnables du modèle sont

- la fonction qui à tout point de la surface du solide associe sa température est continue (et constante par rapport au temps comme indiqué plus haut).
- à tout instant fixé, en tout point  $M$  intérieur au solide la température en  $M$  est la moyenne des températures prises sur une petite boule centrée en  $M$  (propagation de la chaleur dans un solide homogène qui ne contient aucune source de chaleur interne)

On s'intéresse donc au problème suivant, dit de Dirichlet avec condition au bord :

Soit  $G$  un ouvert convexe et borné de  $\mathbb{R}^d$ ,  $\partial G$  sa frontière et soit  $\varphi$  une fonction continue de  $\partial G$  dans  $\mathbb{R}$ . Chercher une fonction continue  $f$  de  $\overline{G}$  dans  $\mathbb{R}$  vérifiant

$$(a) \forall x \in G, \forall r \in ]0, \text{dist}(x, \partial G)[, f(x) = \int_{|y| \leq r} f(x+y) dy$$

$$(b) \forall x \in \partial G, f(x) = \varphi(x)$$

Une solution de ce problème est nécessairement régulière et vérifie une EDP où intervient le laplacien de

$$f, \Delta f = \sum_{k=1}^d \partial_{k,k}^2 f, \text{ on peut énoncer :}$$

**Theorem 7.2.1** Une fonction  $f$  est solution du problème de Dirichlet sur  $G$  avec condition au bord  $(h)$  si et seulement si elle est de classe  $C^2$  sur  $G$ , continue sur  $\overline{G}$ , vérifie la condition au bord  $(b)$  et l'EDP  $(c)$   $\Delta f(x) = 0$ , pour tout  $x \in G$ .

On connaît des théorèmes qui assurent, modulo des conditions sur le domaine  $G$  et sa frontière, l'existence ou l'unicité de  $f$ , solution du problème de Dirichlet  $\begin{cases} (c) \\ (b) \end{cases}$ . Mais il n'y a pas de formule explicite pour exprimer la solution en général et on est amené à développer des méthodes numériques d'approximation des solutions. Un cas particulier où existe une solution sous forme intégrale est celui des boules (euclidiennes), on dispose alors du résultat suivant

**Theorem 7.2.2** *Le problème de Dirichlet sur la boule  $B(0, r)$  avec condition au bord  $\varphi$  est donnée par*

$$f(x) = \int_{\partial[B(0,r)]} \varphi(z) \frac{r^2 - \|x\|^2}{\|z - x\|^d} m_r(dz)$$

où  $m_r$  est la mesure uniforme sur la sphère  $S(0, r) = \partial[B(0, r)]$  de masse  $\mu_r$  choisie pour avoir  $\int_{\partial[B(0,r)]} \frac{r^2 - \|x\|^2}{\|z - x\|^d} m_r$   
1.

La valeur de la solution en  $x$  est une moyenne des valeurs de  $h$  relativement à une probabilité dépendant de  $x$  portée par la sphère  $S(0, r)$ . La fonction densité  $z \mapsto \frac{r^2 - \|x\|^2}{\|z - x\|^d}$  est appelée noyau de Poisson.

Dans le cas d'un domaine  $G$  non borné il faut des conditions supplémentaires pour obtenir existence ou unicité d'une solution. Un cas simple à traiter est celui de  $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$  pour lequel la solution est donnée par

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(z) \frac{x_2}{(x_1 - z)^2 + x_2^2} dz$$

La probabilité portée par la frontière de  $G$  est ici la loi de Cauchy translatée en  $x$ .

## 7.2.2 Méthodes numériques de résolution

### Déterministe

On discrétise l'espace, notant  $h > 0$  le pas de discrétisation, notant  $\sim_h$  la relation de voisinage :

$$\forall (x, y) \in h\mathbb{Z}^d, \quad x \sim_h y \Leftrightarrow \|y - x\| = h$$

posant  $G_h = G \cap h\mathbb{Z}^d$  et  $\partial_h G = \{x \in h\mathbb{Z}^d \setminus G_h, \exists y \in G_h, x \sim_h y\}$ .

Le laplacien discret est donné par  $\Delta_h f(x) = \frac{1}{2d} \sum_{y \sim_h x} f(y) - f(x)$ .

Remarquer que  $\Delta_h f(x) = 0$  équivaut à  $f(x) =$  moyenne uniforme de  $f$  sur le voisinage de  $x$ , ce qui confirme le lien entre les propriétés (a) et (b) du paragraphe précédent.

Le problème de Dirichlet sur  $G$  avec condition au bord  $\varphi$  est remplacé par sa version discrète :

chercher  $f_h$  définie sur  $G_h \cup \partial_h G$  telle que  $\begin{cases} (1) \forall x \in G_h, \Delta_h(f)(x) = 0 \\ (2) \forall x \in \partial_h G, f(x) = \varphi_h(x) \end{cases}$

avec  $\varphi_h(x) =$  valeur moyenne de  $\varphi$  sur  $\partial_h G \cap [x - h, x + h]^d$ .

Il s'agit maintenant de résoudre un système linéaire de  $n$  équations à  $n$  inconnues,  $n = \text{card}(G_h)$ . On dispose pour ce faire de diverses méthodes numériques. On essaye en général de tirer profit de la remarque suivante : la matrice  $n \times n$  du système linéaire est une matrice-bande, propriété qui est conséquence du caractère local de l'opérateur différentiel laplacien.

La méthode de discrétisation est intéressante parce qu'on dispose d'un résultat de convergence de la solution du problème discrétisé vers la solution du problème initial, lorsque  $h$  tend vers  $0^+$ .

### Stochastique

On utilise ici le processus  $W$ , mouvement brownien  $d$ -dimensionnel, dont le générateur infinitésimal est, au facteur  $-1/2$  près, le laplacien. On montre en utilisant la formule d'Ito que la solution du problème de Dirichlet sur  $G$  avec condition au bord  $\varphi$  est donnée par

$$(3) \quad f(x) = \mathbb{E}(\varphi(X(\tau_G)))$$

où  $X(t) = x + W(t)$  et  $\tau_G = \min\{t \geq 0, X(t) \in \partial G\}$  (le temps d'atteinte de la frontière  $\partial G$ ).

Ici aussi on utilise couramment des méthodes de calcul numériques en partant d'une discrétisation de l'espace et en remplaçant le mouvement brownien par une marche aléatoire. Pour définir la marche aléatoire  $X_h$  partant de  $x \in G_h$  (qui remplace le processus  $X(t) = x + W(t)$  évoqué plus haut)

- on considère  $(Y_j)_{j \in \mathbb{N}^*}$  une suite indépendante et équidistribuée de vecteurs aléatoires telle que

$$\forall (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_d) \in \{-1, +1\}^d, \quad \mathbb{P}(Y_j = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_d)) = \frac{1}{2^d}$$

- on pose, pour tout entier  $k \in \mathbb{N}$ ,  $X_h(k) = x + \sum_{j=1}^k Y_j$ .

C'est la marche aléatoire symétrique aux plus proches voisins.

La fonction  $x \mapsto \mathbb{E}(\varphi(X_h(\tau_{G_h})))$  où  $\tau_{G_h} = \min\{k \geq 0, X_h(k) \in \partial G_h\}$  est une solution approchée du problème de Dirichlet sur  $G$  avec condition au bord  $\varphi$ , elle converge vers la solution  $f$  donnée par (3) lorsque  $h$  tend vers  $0^+$ .

Pour calculer cette solution approchée numériquement on utilise la loi des grands nombres, en répétant la simulation de marches aléatoires un grand nombre de fois (méthode de Monte Carlo). Noter que le nombre de variables indépendantes  $Y_j$  qu'il est nécessaire de simuler est toujours fini, puisqu'on arrête la marche aléatoire  $X_h$  dès qu'elle atteint la frontière de  $G$ . Ceci permet d'obtenir des solutions approchées en temps raisonnable.

### 7.2.3 Un extrait de sujet posé en concours CPGE

#### Rappels et notations

- L'espace vectoriel  $\mathbb{R}^2$  est muni de sa structure euclidienne canonique et de la norme associée  $\|\cdot\|_2$ .
- $D(0, 1)$  (respectivement  $\bar{D}(0, 1)$  et  $C(0, 1)$ ) désigne le disque ouvert de centre  $O$  de rayon 1 (respectivement le disque fermé de centre  $O$  de rayon 1 et le cercle de centre  $O$  et de rayon 1).
- On note  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ . Si  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  est une application de classe  $C^2$  sur l'ouvert  $\Omega$ , on rappelle que le laplacien de  $u$  est l'application  $\Delta u = \partial_{1,1}u + \partial_{2,2}u$ .
- Une application  $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  est dite harmonique (sur  $\Omega$ ) si  $v$  est de classe  $C^2$  sur  $\Omega$  avec  $\Delta v(x, y) = 0$  pour tout  $(x, y) \in \Omega$ .
- Pour  $(x, y) \in D(0, 1)$  fixé, on définit le nombre complexe  $z = x + iy$  et on pose pour  $t$  réel

$$N(x, y, t) = \frac{1 - |z|^2}{|z - e^{it}|^2} = \frac{1 - (x^2 + y^2)}{(x - \cos(t))^2 + (y - \sin(t))^2} \quad (\text{quand l'expression a un sens})$$

#### Problème de Dirichlet sur le disque unité de $\mathbb{R}^2$

Soit  $f : C(0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  une application continue. On appelle  $\mathcal{D}_f$  l'ensemble des applications définies et continues sur  $\bar{D}(0, 1)$ , harmoniques sur  $D(0, 1)$  et qui coïncident avec l'application  $f$  sur  $C(0, 1)$ .

Le problème de Dirichlet sur le disque unité de  $\mathbb{R}^2$  associé à  $f$ , consiste à rechercher les éléments de l'ensemble  $\mathcal{D}_f$ . On définit en outre l'application

$$N_f(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} N(x, y, t) f(\cos(t), \sin(t)) dt$$

sur  $D(0, 1)$  et l'application  $u(x, y) = \begin{cases} N_f(x, y) & \text{si } (x, y) \in D(0, 1) \\ f(x, y) & \text{si } (x, y) \in C(0, 1) \end{cases}$  sur  $\bar{D}(0, 1)$ .

1. a. Montrer que  $N_f$  admet une dérivée partielle  $\partial_{1,1}N_f$  d'ordre 2 par rapport à  $x$ .  
De même on peut montrer que  $N_f$  admet des dérivées partielles d'ordre 2 par rapport à toutes ses variables, continues sur  $D(0,1)$ . Ce résultat est admis pour la suite. Exprimer, pour tout  $(x, y) \in D(0,1)$ , pour tout  $(i, j) \in \{1, 2\}^2$ ,  $\partial_{i,j}N_f(x, y)$  en fonction de  $\partial_{i,j}N(x, y, t)$ .
- b. En déduire que  $u$  est harmonique sur  $D(0,1)$ .
2. On fixe  $t_0 \in [0, 2\pi]$ ,  $(x, y) \in D(0,1)$  et  $\varepsilon > 0$ . De plus, on note, pour tout réel  $\delta > 0$  :

$$I_0^\delta = \{t \in [0, 2\pi] / \|(\cos(t), \sin(t)) - (\cos(t_0), \sin(t_0))\|_2 \leq \delta\}$$

- a. Montrer que  $I_0^\delta$  est un intervalle ou bien la réunion de deux intervalles disjoints.
- b. Montrer l'existence d'un réel  $\delta > 0$  tel que

$$\left| \int_{I_0^\delta} N(x, y, t)(f(\cos(t), \sin(t)) - f(\cos(t_0), \sin(t_0))) dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

- c. Soit  $\delta > 0$  quelconque. Montrer que, si  $t \in [0, 2\pi] \setminus I_0^\delta$  et  $\|(x, y) - (\cos(t_0), \sin(t_0))\| \leq \delta/2$ , alors

$$|N(x, y, t)| \leq 4 \frac{1 - (x^2 + y^2)}{\delta^2}$$

- d. En déduire que, pour tout  $\delta > 0$  il existe  $\eta > 0$  tel que, si  $\|(x, y) - (\cos(t_0), \sin(t_0))\|_2 \leq \eta$ , alors

$$\left| \int_{t \in [0, 2\pi] \setminus I_0^\delta} N(x, y, t)(f(\cos(t), \sin(t)) - f(\cos(t_0), \sin(t_0))) dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

3. Prouver que  $u$  est une application continue en tout point de  $C(0,1)$ . Conclusion?
4. (résumée) Montrer que si  $f$  est nulle sur  $C(0,1)$  alors  $u$  est nulle sur  $D(0,1)$ . Conclusion?

### 7.2.4 Suggestions de développement

Ce paragraphe ne contient qu'un petit nombre de suggestions. Vous pouvez choisir d'étudier certains points seulement, de façon plus ou moins approfondie, et pas nécessairement dans l'ordre. Vous pouvez aussi vous poser d'autres questions que celles indiquées ci dessous. Il est vivement souhaité que vos investigations comportent une partie traitée sur ordinateur et, si possible, des représentations graphiques.

#### Aspect mathématique

On peut s'intéresser à la démonstration des résultats théoriques présentés.

Pour les résultats d'existence / unicité on peut s'inspirer du sujet de concours inclus dans ce texte.

Pour l'utilisation de processus  $X$  comme le mouvement brownien (en temps continu) ou la marche aléatoire symétrique (en temps discret) on peut relier la propriété  $(f(X_t))_t$  est une martingale et la propriété  $f$  harmonique.

La méthode numérique probabiliste s'appuie sur le temps d'atteinte de la frontière du domaine  $G$ . Il est sous entendu dans le texte qu'il est bien défini et à valeurs finies, presque sûrement. Comment prouver ces assertions?

Pour le résultat d'unicité de la solution du problème de Dirichlet ou pour l'étude des fonctions harmoniques, une méthode bien connue exploite le principe du maximum. Rappeler l'énoncé de ce principe et montrer comment il peut être utilisé.

### Aspect modélisation calcul numérique et algorithmique

Commenter les hypothèses du modèle. Quel modèle, quelles équations peut on proposer dans le cas où le solide possède des sources de chaleur internes?

La méthode numérique déterministe s'appuie sur la résolution de systèmes linéaires de grandes tailles. Quels sont algorithmes peuvent être efficaces pour cet objectif et comment exploiter la propriété de la matrice des coefficients qui est une matrice bande?

Illustrer sur des exemples la rapidité de convergence de méthodes numériques pour la résolution de systèmes linéaires dans le cas de matrices bandes.

Simuler la marche aléatoire symétrique au plus proche voisin. On peut commencer par le cas de la dimension 1, i.e. le jeu de pile-face.

Utiliser cette simulation pour observer le temps d'atteinte fini de la frontière. Et aussi pour fournir une solution approchée du problème de Dirichlet.

## 7.3 Texte 3 de l'épreuve de modélisation

Le jury n'exige pas une compréhension exhaustive du texte. Vous êtes libres d'organiser votre discussion comme vous l'entendez. Des suggestions de développement, largement indépendantes les unes des autres, vous sont proposées en fin de texte. Ce ne sont que des suggestions et vous n'êtes pas tenu(e) de les suivre. Il vous est conseillé de mettre en lumière vos connaissances à partir du fil conducteur constitué par le texte. Le jury appréciera que la discussion soit accompagnée d'exemples traités sur ordinateur.

### 7.3.1 Introduction, modélisation de gestion de stock

Une entreprise qui vend un certain produit voudrait décider combien d'articles du produit devrait avoir en stock pour chacun des  $n$  prochains mois. Les intervalles de temps entre les instants de deux demandes successives sont des quantités positives, aléatoires indépendantes qui obéissent à une même loi de probabilités supposée exponentielle de moyenne  $\lambda = 0.1$  mois. Les demandes sont des quantités aléatoires indépendantes qui obéissent à une même loi de probabilités sur  $E = \{1, 2, 3, 4\}$ . On suppose que cette loi, notée  $(d(k))_{k \in E}$ , est donnée par  $d(1) = d(4) = 1/6$  et  $d(2) = d(3) = 1/3$ . Au début de chaque mois, l'entreprise vérifie le niveau  $I$  de son stock du produit et décide combien d'articles à commander auprès de son fournisseur. Si l'entreprise commande  $Z$  articles, elle encourt un coût  $C = K + iZ$ , où  $K = 32\$$  est le coût d'installation et  $i = 3\$$  est le coût incrémental par article commandé (si  $Z = 0$ , aucun coût n'est encouru). Quand une commande est formulée, le temps nécessaire pour qu'elle arrive à l'entreprise (temps de livraison) est uniformément distribué entre 0.5 et 1 mois.

L'entreprise adopte une stratégie, notée  $(s, S)$ , pour alimenter son stock et décide une commande  $Z$  selon le schéma suivant:

$$Z = \begin{cases} S - I & \text{si } I < s \\ 0 & \text{si } I \geq s \end{cases}$$

où  $(s, S) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$  avec  $s < S$ .

Lorsqu'une demande  $D$  est formulée par un client, elle est immédiatement satisfaite si le niveau du stock  $I$  est supérieur ou égal à  $D$  (i.e.  $I \geq D$ ). Si la demande  $D$  excède le niveau du stock  $I$  (i.e.  $I < D$ ), l'excès  $\Delta = D - I$  est mis en arriérée (en déficite) et sera satisfait par les livraisons futures. Dans le cas où  $\Delta > 0$ , le niveau du stock  $I$  devient théoriquement négatif ( $I = -\Delta$ ). Lorsqu'une livraison est arrivée, elle est d'abord utilisée pour absorber les arriérées et ensuite, s'il en reste, elle alimente le stock.

Soit  $I(t)$  le niveau du stock à l'instant  $t$ . Notons  $I^+(t)$  et  $I^-(t)$  les quantités  $\max(I(t), 0)$  et  $\max(-I(t), 0)$  respectivement. Pour une période de  $n$  mois ( $n \in \mathbb{N}^*$ ), considérons les quantités  $A^+(n)$  et  $A^-(n)$  définies

par

$$A^+(n) = \frac{1}{n} \int_0^n I^+(t) dt \quad \text{et} \quad A^-(n) = \frac{1}{n} \int_0^n I^-(t) dt.$$

Supposons que l'entreprise encourt deux autres coûts: un coût de maintien noté  $m$  et un coût de l'arriérée noté  $a$ . Le coût  $m = 1\$$ , par article par mois, inclut la location du magasin (entrepot), l'assurance, la maintenance, etc. et le coût des arriérées, quand elles existent,  $a = 5\$$  par article manquant par mois.

### 7.3.2 Données pour comparaison de stratégies de stock

Supposons qu'à l'instant 0, aucune demande n'est formulée et que  $I(0) = 60$ .

On simule le comportement du stock pour  $n = 120$  mois et on compare le coût total moyen par mois  $CTM$  (somme des différents coûts moyens par mois) pour chacune des 9 stratégies de stockage données dans la table (**Table 1.**) suivante:

$s$	20	20	20	20	40	40	40	60	60
$S$	40	60	80	100	60	80	100	80	100

**Table 1.** Différentes stratégies ( $s, S$ )

### 7.3.3 Quelques outils probabilistes

Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé dans lequel sont définies toutes les variables aléatoires considérées dans la modélisation proposée.

#### Définition

La densité de probabilité  $f$  d'une variable aléatoire réelle  $X$  qui obéit à une loi exponentielle de paramètre  $\alpha > 0$  (notation:  $X \sim \text{Exp}(\alpha)$ ) est définie par

$$f(x) = \alpha e^{-\alpha x} \mathbb{1}_{[0, +\infty[}(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

où la notation  $\mathbb{1}_A$  désigne la fonction indicatrice de l'ensemble  $A$ . La fonction de répartition de cette loi exponentielle est donnée par

$$F(t) = \int_{-\infty}^t f(x) dx = 1 - e^{-\alpha t}, \quad t \in \mathbb{R}$$

#### Théorème

Soit  $X$  une variable aléatoire réelle de fonction de répartition  $F$  continue. La variable aléatoire réelle  $Y$  définie par  $Y = F(X)$  obéit à une loi de probabilité uniforme sur  $]0, 1[$ .

#### Inverse généralisé de $F$

Soit  $X$  une variable aléatoire réelle de fonction de répartition  $F$ . La fonction inverse généralisée  $F^-$  de  $F$  est définie par:

$$F^-(u) = \inf\{x \in \mathbb{R} / F(x) \geq u\}, \quad u \in ]0, 1[$$

#### Remarque

Si  $F$  est inversible, alors  $F^- = F^{-1}$ .

**Exemples**

1)– Pour une variable aléatoire exponentielle  $X \sim Exp(\alpha)$ , nous avons

$$F^-(u) = F^{-1}(u) = \frac{-\ln(1-u)}{\alpha}, \quad u \in ]0, 1[ \tag{7.3.2}$$

2)– Pour une variable aléatoire réelle discrète  $X$  à valeurs dans  $E = \{x_1, x_2, \dots\}$  de loi de probabilités discrète  $p_k = \mathbb{P}(X = x_k)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , nous avons, pour une réalisation uniforme  $u \in ]0, 1[$ ,

$$(2) \left\{ \begin{array}{ll} \text{Si } u \leq p_1 & \text{alors } F^-(u) = x_1 \\ \text{Sinon } F^-(u) = x_k & \text{telle que } \left( \sum_{i=1}^{k-1} p_i < u \leq \sum_{i=1}^k p_i \right) \end{array} \right.$$

**7.3.4 Outils informatiques**

La simulation Monte Carlo, d’un modèle aléatoire, utilise une suite  $u_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , de réalisations de la loi uniforme sur  $]0, 1[$ . On **admet** qu’une telle suite peut être produite par une machine informatique par le biais d’une fonction dite générateur de nombres aléatoires. Par exemple, en langage C, l’appel de la fonction `rand()` donne un nombre entier entre 1 et une grande constante entière positive `RAND_MAX`, d’où la division  $u = (\text{float})\text{rand}() / \text{RAND\_MAX}$  donne un réel  $u \in ]0, 1[$  que l’on prend comme une réalisation de la loi uniforme sur  $]0, 1[$ . Généralement les langages informatiques dédiés au calcul scientifique sont dotés de générateurs de nombres aléatoires.

**7.3.5 Suggestions de développement**

Ce paragraphe ne contient qu’un petit nombre de suggestions. Vous pouvez choisir d’étudier certains points seulement, de façon plus ou moins approfondie, et pas nécessairement dans l’ordre. Vous pouvez aussi vous poser d’autres questions que celles indiquées ci dessous. Il est vivement souhaité que vos investigations comportent une partie traitée sur ordinateur et, si possible, des représentations graphiques.

**Aspect mathématique**

1)– Proposer une preuve pour le théorème donné dans le paragraphe **”Quelques outils probabilistes”**.

2)– Déterminer le lien entre le paramètre  $\lambda$  défini dans la section I et le paramètre  $\alpha$  défini dans la section III.

3)– Soit  $t > 0$ . Exprimer  $I^+(t)$  en fonction des instants  $t_k \in [0, t]$  et des demandes  $D_k$  formulées aux instants  $t_k$ .

4)– Que modélisent les quantités suivantes (quand elles existent):

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} A^+(n) \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} A^-(n).$$

5)– Expliciter la loi de probabilités du temps de livraison et discuter l’importance du support de cette loi.

**Aspect enseignement**

- 1)– Proposer d'autres types de coût et montrer comment peut-on les inclure dans le modèle proposé.
- 2)– Peut-on spécifier la loi de la demande en proposant par exemple une loi binômiale ou une loi de Poisson. Qu'est ce qu'on doit préciser dans le texte concernant chacune de ces deux lois proposées. Peut-on proposer une loi normale pour la demande?
- 3)– Discuter la possibilité de passer la commande à tout instant voulu, au lieu que ça soit uniquement au début de chaque mois.

**Aspect modélisation, calcul numérique et algorithmique**

- 1)– Peut-on construire théoriquement une suite de nombres aléatoires ? (donner des ingrédients justifiant votre réponse).
- 2)– Proposer un procédé mathématique qui peut jouer le rôle d'un générateur de nombres aléatoires.
- 3)– Comment peut-on vérifier que l'algorithme suivant permet de générer une réalisation  $x$  de  $X$  dont la fonction de répartition est  $F$ :

**Etape 1:** générer  $u$  uniforme dans  $]0, 1[$  (par un générateur de nombres aléatoires)

**Etape 2:** prendre  $x = F^{-1}(u)$

- 4)– Pour une stratégie  $(s, S) = (30, 90)$ , proposer une réalisation possible de  $I(t)$ , durant les 3 premiers mois, pendant laquelle figurent des arriérées en traçant les courbes de  $I(t)$ ,  $I^+(t)$  et  $I^-(t)$ .
- 5)– Interpréter les quantités  $mA^+(n)$  et  $aA^-(n)$ .
- 6)– Comment réalise-t-on l'indépendance entre deux variables aléatoires dans un programme informatique.
- 7)– Justifier le fait qu'on peut remplacer  $\ln(1 - u)$  par  $\ln(u)$  dans la formule (7.3.2).
- 8) Ecrire un algorithme détaillé et clair qui permet de simuler le modèle aléatoire utilisé pour la gestion du stock de l'entreprise puis le traduire dans un langage de programmation (en C par exemple) que vous exécutez sur machine. L'algorithme doit aboutir à la comparaison des 9 stratégies proposées dans le tableau des données (**Table 1.**) en calculant toutes les quantités utiles à cette comparaison. Vous présenter les résultats de l'exécution dans des tableaux et/ou sous formes graphiques (les graphiques sont plus sollicités). Commentez les résultats obtenus.

## 7.4 Texte 4 de l'épreuve de modélisation

### Simulation informatique de certaines lois de variables aléatoires usuelles

De multiples applications : simulation de phénomènes physiques, méthodes de Monte-Carlo pour le calcul d'intégrales complexes, algorithmes probabilistes parmi autres applications, sont le fruit de la simulation informatique du hasard. Cette simulation est, en général, basée sur la construction d'un générateur de nombres aléatoires et la plupart des langages informatiques possèdent un générateur de nombres aléatoires. En Python par exemple, après avoir importé la classe `random`

```
>>> from random import *
```

la fonction

```
>>> choice([0,1])
```

permet de générer un nombre aléatoire parmi 0 ou 1 et de manière équiprobable. Ce qui permet de simuler un jeu équitable de Pile ou Face. Si on fait appel à cette fonction du hasard `choice([0,1])` un certain nombre de fois et on appelle  $X_n$  la valeur obtenue au  $n$ -ème appel, on obtient ainsi une suite  $(X_n)_{n \geq 1}$  de variables aléatoires indépendantes et de même loi de Bernoulli de paramètre  $p = \frac{1}{2}$ . La variable aléatoire

$$U = \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-n} X_n \tag{1}$$

suit alors la loi uniforme sur  $[0,1]$ . Ce qui permet alors de faire une simulation de loi uniforme sur  $[0,1]$  sans oublier que l'on ne peut pas pratiquement aller jusqu'à l'infini pour obtenir la valeur de  $U$ . Il faut alors procéder à des approximations. Toutefois, il est possible d'obtenir cette valeur directement par Python

```
>>> import random
```

```
>>> random.uniform(0,1)
```

La valeur retournée est de 16 chiffres après la virgule. Ce serait intéressant si on pouvait simuler d'autres variables aléatoires classiques telles que celles suivant la loi de Laplace ou la loi normale. Ces deux dernières lois ont les propriétés d'avoir des densités de probabilités continues et strictement positives sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ . Nous allons nous intéresser donc à des variables aléatoires vérifiant ces propriétés. On se place donc dans un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  et on désigne par :

- $I = ]a, b[$  un intervalle non vide, borné ou non, de  $\mathbb{R}$ ,
- $X$  une variable aléatoire réelle sur  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  de fonction de répartition  $F$  admettant une densité de probabilité  $f$  continue et strictement positive sur  $I$ ,
- $U$  une variable aléatoire indépendante de  $X$  et suit une loi uniforme sur  $]0, 1[$ ,
- $h$  une fonction continue sur  $I$  à valeurs dans  $[0, 1]$ .

On introduit la fonction  $\Psi$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\forall x \in I, \Psi(x) = \mathbb{P}([X \leq x] \cap [U \leq h(X)])$$

et on laisse au lecteur le soin de vérifier la validité de certaines propriétés relatives aux notations introduites ci-dessus.

**Proposition 1** Les fonctions  $M$  et  $m$  définies sur  $I^2$  par :

$$\forall (x, y) \in I^2, M(x, y) = \max_{t \in [0,1]} h(tx + (1-t)y) \quad \text{et} \quad m(x, y) = \min_{t \in [0,1]} h(tx + (1-t)y) \tag{2}$$

sont continues sur  $I^2$ .

Ces fonctions permettent de donner un encadrement du taux d'accroissement de la fonction  $\Psi$  :

**Proposition 2** Soient  $M$  et  $m$  les deux fonctions introduites dans la proposition 2. Alors, pour tous  $x$  et  $y$  de  $I$  tels que  $x < y$ , on a

$$\frac{F(y) - F(x)}{y - x} m(x, y) \leq \frac{\Psi(y) - \Psi(x)}{y - x} \leq \frac{F(y) - F(x)}{y - x} M(x, y). \tag{3}$$

Les inégalités (3) peuvent être obtenues en comparant, d'un point de vue inclusion, les événements :

$$[x < X \leq y] \cap [U \leq h(X)], \quad [x < X \leq y] \cap [U \leq M(x, y)] \quad \text{et} \quad [x < X \leq y] \cap [U \leq m(x, y)].$$

Cette dernière proposition nous permet d'établir le résultat suivant :

**Proposition 3** Pour tout  $x$  de  $I$ , on a

$$\mathbb{P}([X > x] \cap [U \leq h(X)]) = \mathbb{P}([U \leq h(X)]) - \Psi(x). \quad (4)$$

En particulier,  $\mathbb{P}([U \leq h(X)]) = \int_a^b f(t)h(t)dt$ .

Les fonctions introduites plus haut permettent de générer une variable aléatoire  $Z$  facile à simuler et ayant la même loi que la variable aléatoire  $X$ .

**Proposition 4** Soit  $H$  la restriction de  $F$  à  $I$ . Alors, la fonction  $H$  réalise une bijection de  $I$  sur  $]0, 1[$ . En plus, les deux variables aléatoires  $Z = H^{-1}(U)$  et  $X$  ont la même loi.

Nous allons maintenant appliquer l'étude théorique discutée plus haut pour la simulation de certaines variables aléatoires usuelles.

### Simulation de la loi exponentielle.

On suppose que la variable aléatoire  $X$  suit la loi exponentielle de paramètre  $\lambda > 0$ . On peut supposer donc que  $I = ]0, +\infty[$  et on rappelle que  $f$  est donnée par

$$\forall x > 0, f(x) = \lambda e^{-\lambda x}.$$

Pour la simulation de la variable aléatoire  $X$ , il suffit d'être capable de déterminer explicitement la fonction  $H^{-1}$  d'après l'étude théorique précédente. On peut donc écrire en `Python` une fonction `expo` permettant de simuler la loi exponentielle.

### Simulation de la loi de Laplace.

On suppose maintenant que la variable aléatoire  $X$  suit la loi de Laplace donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}.$$

Pour la simulation de la variable aléatoire  $X$ , on introduit une nouvelle variable aléatoire  $Y$  suivant une loi exponentielle de paramètre 1 et une variable aléatoire  $V$  suivant une loi uniforme sur  $\{-1, 1\}$  et indépendante de  $Y$  puis on pose  $Z = VY$ . Le lien entre les variables aléatoires  $Z$  et  $X$  est donné par le résultat suivant :

**Proposition 5** Les variables aléatoires  $Z$  et  $X$  ont la même loi.

Basé sur ce résultat, il est possible de simuler la variable aléatoire  $X$ . Nous appelons `laplace` une fonction écrite en `Python` qui permet de simuler la loi de  $X$ .

Jusque là, on a pu avoir une idée sur une méthode de simulation de quelques lois usuelles en se basant sur la simulation de la loi uniforme et sur le calcul de façon explicite de la fonction inverse  $H^{-1}$ . Cette méthode s'appelle la méthode d'inversion. Nous allons maintenant présenter une autre méthode appelée simulation par la méthode du rejet. Pour la présentation de cette méthode, on suppose qu'on sait simuler la loi d'une variable aléatoire  $Z$  ayant une densité de probabilité  $g$  continue et strictement positive sur l'intervalle  $I$  telle qu'il existe  $c > 0$  et  $f(x) \leq cg(x)$  pour tout  $x$  dans  $I$  de sorte que l'on puisse définir une fonction  $h$  continue sur  $I$  et à valeurs dans  $[0, 1]$  telle que  $f(x) = cg(x)h(x)$  pour tout  $x$  dans  $I$ . Ensuite, on introduit :

- une suite de variables aléatoires  $(U_k)_{k \geq 1}$  suivant la loi uniforme sur  $]0, 1[$ ,
- une suite de variables aléatoires  $(Z_k)_{k \geq 1}$  à valeurs dans  $]a, b[$ , ayant toutes la même loi de densité de probabilité  $g$  de fonction répartition  $G$ .

En plus, on suppose, pour tout  $n \geq 1$ , que les variables

$$Z_1, \dots, Z_n, U_1, \dots, U_n$$

sont mutuellement indépendantes et on définit la variable aléatoire  $N$  prenant comme valeur le premier indice  $k$  tel que  $U_k \leq h(X_k)$ . Ces hypothèses nous permettent, en plus de la Proposition 3, de vérifier le résultat suivant :

**Proposition 6** La variable aléatoire  $N$  suit la loi géométrique de paramètre  $\frac{1}{c}$ .

On définit alors la variable aléatoire  $Z$  comme étant la valeur de  $Z_N$ , c'est-à-dire la valeur de

$$\forall \omega \in \Omega, Z(\omega) = Z_{N(\omega)}(\omega).$$

En explorant, pour  $n \geq 1$ , la relation qui existe entre l'événement  $[Z \leq x] \cap [N = n]$  et les événements

$$[Z_n \leq x] \cap [U_n \leq h(Z_n)], [U_1 > h(Z_1)], \dots, [U_{n-1} > h(Z_{n-1})],$$

on peut démontrer que

$$\mathbb{P}([Z_n \leq x] \cap [U_n \leq h(Z_n)]) = \frac{1}{c} F(x). \quad (5)$$

Puis à l'aide de la définition de la fonction  $\Psi$  introduite plus haut, on démontre aussi le résultat suivant :

**Proposition 7** Les variables aléatoires  $X$  et  $Z$  ont la même loi.

Rappelons que l'objectif est de simuler la loi de la variable aléatoire  $X$  qui est aussi, d'après la Proposition 7, la loi de la variable aléatoire  $Z$ . Il suffit de savoir simuler la loi de  $Z$ . Prenons alors l'exemple où la variable aléatoire  $X$  suit la loi normale  $\mathcal{N}(0, 1)$ , c'est-à-dire que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

On suppose en plus que les variables aléatoires  $Z_1, \dots, Z_n, \dots$  suivent la loi de Laplace de sorte que l'on puisse déterminer explicitement une constante  $c > 0$  la plus petite possible telle que  $f(x) \leq cg(x)$  pour tout  $x$  réel. De cette manière, on peut enfin simuler la loi normale  $\mathcal{N}(0, 1)$ .

Une autre méthode pour simuler des variables gaussiennes consiste à partir d'un couple  $(U, V)$  de variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur le segment  $[0, 1]$  et à poser

$$X = \sqrt{-2 \ln(U)} \cos(2\pi V) \quad \text{et} \quad Y = \sqrt{-2 \ln(U)} \sin(2\pi V). \quad (6)$$

Le couple  $(X, Y)$  est un couple indépendant de variables aléatoires, de même loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ .

## Suggestions pour le développement

- *Soulignons qu'il s'agit d'un menu à la carte et que vous pouvez choisir d'étudier certains points, pas tous, pas nécessairement dans l'ordre, et de façon plus ou moins fouillée. Vous pouvez aussi vous poser d'autres questions que celles indiquées plus bas. Il est très vivement souhaité que vos investigations comportent une partie traitée sur ordinateur.*
- On pourra simuler la loi exponentielle en expliquant la méthode utilisée.
- On pourra simuler la loi de Laplace en expliquant la méthode utilisée.
- On pourra simuler la loi normale en expliquant la méthode utilisée.
- On pourra démontrer l'une des propositions 1, ..., 7 citées plus haut.
- On pourra expliquer pourquoi la variable aléatoire décrite dans la formule (1) suit la loi uniforme sur  $[0, 1]$ .
- On pourra justifier le caractère gaussien du couple  $(X, Y)$  obtenu dans la formule (6).

## 7.5 Texte 5 de l'épreuve de modélisation

Epreuve de modélisation : File d'attente

session 2021

Le jury n'exige pas une compréhension exhaustive du texte. Vous êtes libres d'organiser votre discussion comme vous l'entendez. Des suggestions de développement, largement indépendantes les unes des autres, vous sont proposées en fin de texte. Ce ne sont que des suggestions et vous n'êtes pas tenu(e) de les suivre. Il vous est conseillé de mettre en lumière vos connaissances à partir du fil conducteur constitué par le texte. Le jury appréciera que la discussion soit accompagnée d'exemples traités sur ordinateur.

### I. Modélisation d'une file d'attente d'un guichet

On considère une file d'attente en temps discret qui se forme à un guichet, selon le phénomène suivant : à chaque instant  $n \in \mathbb{N}$ , il arrive un client avec la probabilité  $p \in ]0, 1[$  et pas de client avec une probabilité  $1 - p$ . Lorsqu'il y a au moins un client en attente, à chaque instant un client est servi et quitte le système (la file d'attente) avec probabilité  $q \in ]0, 1[$ , et personne ne quitte le système avec la probabilité  $1 - q$  (un client qui arrive à l'instant  $n$  repart au plus tôt à l'instant  $n + 1$ ). Les événements liés aux arrivées et aux départs des clients sont indépendants entre eux. On suppose qu'à chaque instant  $n$ , il est question d'un seul client qui peut arriver et d'un seul client qui peut quitter le système. On exclut l'arrivée de deux clients au même instant et on exclut le départ de deux clients au même instant mais on tolère l'arrivée d'un client et le départ d'un autre au même instant. On suppose que les clients sont servis dans l'ordre de leurs arrivées.

On modélise le nombre de clients présents dans la file à l'instant  $n$  par la variable  $X_n$ . Si on note  $A_n$  (resp.  $D_n$ ) l'événement "Arrivée d'un client à l'instant  $n$ " (resp. "Départ d'un client à l'instant  $n$ ") et si  $\bar{A}_n$  et  $\bar{D}_n$  sont respectivement les événements complémentaires de  $A_n$  et  $D_n$ , alors  $X_{n+1}$  peut s'écrire sous la forme :

- si  $X_n = 0$  alors  $X_{n+1} = \mathbb{1}(A_{n+1})$
- si  $X_n \geq 1$  alors

$$X_{n+1} = X_n \mathbb{1}((A_{n+1} \cap D_{n+1}) \cup (\bar{A}_{n+1} \cap \bar{D}_{n+1})) + (X_n + 1) \mathbb{1}(A_{n+1} \cap \bar{D}_{n+1}) + (X_n - 1) \mathbb{1}(\bar{A}_{n+1} \cap D_{n+1}),$$

avec, pour un événement  $E$ ,  $\mathbb{1}(E) = 1$  si  $E$  est réalisé et  $\mathbb{1}(E) = 0$  si  $E$  n'est pas réalisé.

Quand un événement n'est pas réalisé, c'est donc son complémentaire qui est réalisé.

On montre que  $X = \{X_n, n \in \mathbb{N}\}$  est une chaîne de Markov homogène, irréductible, d'espace d'état  $\mathbb{N}$ , et de matrice de transition  $P = (P(i, j))_{i, j \in \mathbb{N}}$  donnée par.

$$P = \begin{pmatrix} \bar{p} & p & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ q\bar{p} & pq + \bar{p}\bar{q} & p\bar{q} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & q\bar{p} & pq + \bar{p}\bar{q} & p\bar{q} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & q\bar{p} & pq + \bar{p}\bar{q} & p\bar{q} & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

avec  $\bar{p} = 1 - p$  et  $\bar{q} = 1 - q$ .

On montre, sous des conditions sur  $p$  et  $q$ , que la chaîne  $X$  possède une probabilité invariante unique  $\pi = (\pi_i)_{i \in \mathcal{N}}$ .

Une des mesures de performance du système est le temps moyen de séjour dans un sous espace d'états du système.

## II- Un rappel sur les chaîne de Markov à temps discret

Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé dans lequel sont définies toutes les variables aléatoires considérées dans la modélisation proposée.

Soit le processus  $X = (X_n)_{n \geq 0}$  défini par une suite de variables aléatoires à valeurs dans un ensemble fini  $E$  appelé espace d'état, et soit  $\mu = (\mu(i))_{i \in E}$  une loi de probabilités sur  $E$ . Pour  $i \in E$ , la notation  $X_n = i$  signifie que le processus  $X$  est dans l'état  $i$  à l'instant  $n$ .

**II.1 Définition 1.** On dit que le processus  $X = (X_n)_{n \geq 0}$  est une chaîne de Markov à temps discret ( $n \in \mathbb{N}$ ), à espace d'état  $E$  et de loi initiale  $\mu$  si et seulement si

$$\forall n \geq 0, \forall i, i_0, \dots, i_{n-1}, j \in E,$$

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j / X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i) = \mathbb{P}(X_{n+1} = j / X_n = i)$$

$$\mathbb{P}(X_0 = i) = \mu(i)$$

La probabilité  $\mathbb{P}(X_{n+1} = j / X_n = i)$  est appelée probabilité de transition, de la chaîne  $X$ , de l'état  $i$  à l'état  $j$  entre les instants  $n$  et  $n + 1$ .

**II.2 Définition 2.** La chaîne de Markov  $X$  est dite homogène dans le temps si et seulement si la probabilité  $\mathbb{P}(X_{n+1} = j / X_n = j)$  est indépendante du temps  $n$ . Dans ce cas on la note  $K(i, j) := \mathbb{P}(X_{n+1} = j / X_n = j)$ , et la matrice ainsi obtenue  $K = (K(i, j))_{i, j \in E}$  est appelée matrice de transition de la chaîne de Markov homogène  $X$ .

**II.3 Remarque 1.** Une chaîne de Markov à temps discret et homogène  $X$  est caractérisée par le triplet  $(E, \mu, K)$ , où  $E$  est son espace d'état,  $\mu = (\mu(i))_{i \in E}$  est sa loi initiale,  $\mu(i) = \mathbb{P}(X_0 = i)$ , et  $K = (K(i, j))_{i, j \in E}$  est sa matrice de transition.

**II.4 Remarque 2.** Pour tout état  $i$  fixé dans  $E$ ,  $\{K(i, j), j \in E\}$  est une loi de probabilité sur  $E$ . Les lignes de la matrice de transitions sont donc des lois de probabilité sur  $E$ .

**II.5 Notations.** On note  $X \sim (E, \mu, K)$  pour désigner une chaîne de Markov  $X = (X_n)_{n \geq 0}$  à temps discret, à espace d'état  $E$ , de loi initiale  $\mu = (\mu(i))_{i \in E}$ , et de matrice de transition  $K = (K(i, j))_{i, j \in E}$ .

**II.6 Graphe de transition.** Le graphe de transition d'une chaîne de Markov  $X \sim (E, \mu, K)$  est un graphe orienté et évalué, dont les sommets sont les états (éléments de  $E$ ) et les arcs sont des flèches dont les valeurs sont les coefficients de la matrice  $K$  (la

valeur de l'arc qui se dirige de l'état  $i$  vers l'état  $j$  est  $K(i, j)$ ). Les arcs de valeurs nulles ne sont pas dessinés.

**II.7 Définition 3.** On dit qu'une chaîne de Markov  $X \sim (E, \mu, K)$  est irréductible si et seulement si

$$\forall i, j \in E, \exists m \in \mathbb{N}^* \quad K^{(m)}(i, j) > 0$$

où  $K^{(m)}(i, j)$  est l'entrée  $(i, j)$  de la matrice  $K^m$ . Cela représente la probabilité de passer de l'état  $i$  à l'état  $j$  en  $m$  transitions.

Nous avons donc pour tout  $i, j \in E$ ,

$$K^{(m)}(i, j) = \sum_{i_1, \dots, i_{m-1} \in E} K(i, i_1)K(i_1, i_2) \cdots K(i_{m-1}, j) \quad (1)$$

**II.8 Proposition 1.** Soit une chaîne de Markov homogène  $X \sim (E, \mu, K)$ .

Alors  $\forall n \geq 0, \forall i_0, i_1, \dots, i_n \in E$

$$\mathbb{P}(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_n = i_n) = \mu(i_0)K(i_0, i_1)K(i_1, i_2) \cdots K(i_{n-1}, i_n)$$

**II.9 Proposition 2.** Soit une chaîne de Markov homogène  $X \sim (E, \mu, K)$ . Alors

$$\forall m > 0, \quad \mathbb{P}(X_m = j) = \sum_{i \in E} \mu(i)K^{(m)}(i, j), \quad \forall j \in E$$

**II.10 Proposition 3.** Soit une chaîne de Markov homogène  $X \sim (E, \mu, K)$ . Alors

$$\forall n \geq 0, \forall m > 0, \forall i, j \in E, \quad \mathbb{P}(X_{n+m} = j / X_n = i) = \mathbb{P}(X_m = j / X_0 = i) = K^{(m)}(i, j)$$

**II.11 Proposition 4.** Soit une chaîne de Markov homogène  $X \sim (E, \mu, K)$ . Nous avons alors les équations de Chapman-Kolmogorov suivantes :

$$\forall m \geq 2, \forall 0 < r < m, \forall i, j \in E, \quad K^{(m)}(i, j) = \sum_{k \in E} K^{(m-r)}(i, k)K^{(r)}(k, j)$$

**II.12 Définition 4 (loi stationnaire ou invariante).** Soit une chaîne de Markov homogène  $X \sim (E, \mu, K)$ . On dit qu'une loi de probabilité,  $\pi = (\pi(i))_{i \in E}$  sur  $E$ , est une loi stationnaire de  $X$  (ou loi invariante par  $K$ ) si et seulement si

$$\sum_{i \in E} \pi(i)K(i, j) = \pi(j), \quad \forall j \in E \quad (2)$$

Les équations (2) sont appelées **équations de balance ou d'équilibre**. Elles peuvent être réécrites matriciellement sous la forme

$$\pi^t K = \pi^t \quad (\pi^t \text{ désigne la transposée du vecteur colonne } \pi)$$

**II.13 Théorème 1.** Si  $X \sim (E, \mu, K)$  est une chaîne de Markov homogène et irréductible avec  $E$  fini, alors il existe une loi stationnaire  $\pi = (\pi(i))_{i \in E}$  unique de  $X$ .

### II.14 Génération d'une trajectoire d'une chaîne de Markov

Soit  $X \sim (E, \mu, K)$  une chaîne de Markov homogène. Une procédure de génération d'une trajectoire  $x = (x_0, x_1, \dots, x_p)$ , de longueur  $p$ , de la chaîne  $X$  est la suivante :

*on commence par générer la réalisation  $x_0$  selon la loi de probabilité initiale  $\mu$  définie sur  $E$ , puis à partir de  $x_0$ , on génère de manière récursive pour  $k = 1, \dots, p$ , chaque réalisation  $x_k$  par la loi de probabilité  $K(x_{k-1}, \cdot)$  définie sur  $E$ .*

#### II.14.1 Génération selon une loi de probabilité discrète.

Pour une variable aléatoire réelle discrète  $Y$  à valeurs dans  $E = \{y_k; k = 1, 2, \dots\}$  de loi de probabilités discrète  $p_k = \mathbb{P}(Y = y_k)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , on génère une réalisation  $y$  de  $Y$ , en utilisant un nombre uniforme  $u \in ]0, 1[$ , donnée par un générateur de nombres aléatoires (random), de la façon suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Si } u \leq p_1 \\ \text{Sinon on décide } y = y_k \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{on décide } y = y_1 \\ \text{telle que} \end{array} \quad \left( \sum_{i=1}^{k-1} p_i < u \leq \sum_{i=1}^k p_i \right)$$

### III- Suggestions de développement

Ce paragraphe ne contient qu'un petit nombre de suggestions. Vous pouvez choisir d'étudier certains points seulement, de façon plus ou moins approfondie, et pas nécessairement dans l'ordre. Vous pouvez aussi vous poser d'autres questions que celles indiquées ci-dessous. Il est vivement souhaité que vos investigations comportent une partie traitée sur ordinateur et, si possible, des représentations graphiques.

#### III.1 Aspect mathématique

- 1.) Proposer des preuves pour les propositions 1, 2, 3 et 4
- 2.) Etudier la classification des états de la chaîne  $X$  du modèle proposé.
- 3.) Etudier l'existence et l'unicité d'une loi probabilité invariante  $\pi$  pour la chaîne du modèle proposé.
- 4.) Expliciter  $\pi$ , quand elle existe, en fonction des paramètres du modèle proposé.
- 5.) Définir le temps moyen de séjour de la chaîne  $X$  dans un état donné

#### III.2 Aspect enseignement

- 1.) Expliquer la formulation de  $X_{n+1}$  en fonction de  $X_n$  (donnée dans le text)
- 2.) Tracer le graphe de transition de la chaîne  $X$
- 3.) Expliquer ce que signifie l'homogénéité de la chaîne  $X$ .
- 4.) Expliquer ce que signifie la classification des états de la chaîne  $X$ .
- 5.) Proposer d'autres mesures de performance du système modélisé
- 6.) Repérer les changements dans le modèle si on rajoute la contrainte suivante :  
la capacité du système est limitée (à tout instant  $n$ , on ne peut avoir plus de  $K$

clients dans le système ).

### III.3 Aspect modélisation, calcul numérique et algorithmique

- 1.) Simuler et tracer une trajectoire de la chaîne  $X$  de l'instant  $n = 0$  à l'instant  $n = 100$  en supposant que  $X$  démarre dans l'état 0, pour  $p = 1/2$  et  $q = 3/4$ .
- 2.) En générant 100000 trajectoires de  $X$  démarrant dans l'état 0, calculer une approximation de  $\pi_2$ . On traitera le cas  $(p, q) = (1/2, 3/5)$ .
- 3.) On suppose maintenant que le système est de capacité finie  $K$ . Dans ce cas l'espace d'état de  $X$  devient  $\{0, 1, \dots, K\}$ . Pour simplifier on garde les mêmes notations que pour le cas d'une capacité illimité.
  - 3.1) Tronquer la matrice de transition  $P$  en supprimant les lignes  $i > K$  et les colonnes  $j > K$ , puis renormaliser la dernière ligne de la matrice tronquée pour obtenir une matrice de transition.
  - 3.2) En prenant  $K = 3$  (dans toute la suite), expliciter la loi invariante  $\pi$ .
  - 3.3) Générer une trajectoire de longueur  $n = 1000$  et calculer les quantités  $\hat{p}_j(n)$ , pour  $j = 0, 1, \dots, K$ , définies par :

$$\hat{p}_j(n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{1}(X_k = j)$$

- 3.4) Comparer graphiquement les  $\pi_j$  avec les  $\hat{p}_j(n)$  pour les valeurs de  $n$  : 100, 1000 et 10000. On traitera les cas  $(p, q) = (1/2, 3/5)$
- 3.5) Proposer une approximation du temps moyen de séjour dans un état du système.

## 7.6 Texte 6 de l'épreuve de modélisation

### CALCUL DE VECTEURS ET VALEURS PROPRES

#### INTRODUCTION

Sans aucun doute, les valeurs ou vecteurs propres d'une matrice carrée ont beaucoup d'applications dans les domaines des sciences.

Malgré cette restriction, dans beaucoup de problèmes issus des sciences physiques est présente.

#### 1 OBTENTION DE LA VALEUR PROPRE DOMINANTE.

Soient  $A$  une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  de polynôme caractéristique  $\Delta_A(t) = (t - \lambda)^p S(t)$  avec  $S(\lambda) \neq 0$  et  $\|\cdot\|$  une norme sur  $\mathbb{K}^n$ , où  $\mathbb{K}$  est le corps des nombres réels ou celui des nombres complexes. On note  $\mu$  une racine de  $S(t)$  de module maximal,  $P$  la matrice de la projection sur  $\ker(\lambda I_n - A)$  parallèlement à  $\ker S(A)$  dans la base canonique de  $\mathbb{K}^n$ ,  $Q = A - \lambda P$  et  $q = n - p$ . On suppose que  $|\lambda| > |\mu|$  et que la multiplicité algébrique  $p$  coïncide avec la multiplicité géométrique  $\dim \ker(\lambda I_n - A)$ . On fait le départ d'un vecteur  $x_0$  de  $\mathbb{K}^n$  tel que  $Px_0 \neq 0$  et on définit les deux suites  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  et  $(z_k)_{k \in \mathbb{N}}$  par  $x_k = \frac{A^k x_0}{\|A^k x_0\|}$  et  $z_k = \frac{\lambda^k P x_0}{\|\lambda^k P x_0\|}$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ . Soit  $F$  une matrice de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  telle que ses colonnes  $v_1, \dots, v_p$  forment une base de  $\mathbb{F}$  et  $G$  une matrice de  $\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{C})$  telle que ses colonnes  $w_1, \dots, w_q$  forment une base de  $\mathbb{G}$ . On note  $\Lambda$  la matrice obtenue par juxtaposition verticale de  $F$  et  $G$ ;  $\Lambda = [F, G]$ .

##### Proposition 1

La matrice  $\Lambda$  est inversible et on a

$$P = \Lambda \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Lambda^{-1} \quad \text{et} \quad Q = \Lambda \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \Lambda^{-1}, \quad (1.1)$$

où  $B$  est une matrice  $B \in \mathcal{M}_q(\mathbb{C})$  telle que  $AG = GB$ . En plus, on a  $PQ = QP = 0$  et

$$A^k = \lambda^k P + Q^k. \quad (1.2)$$

pour tout  $k$  dans  $\mathbb{N}^*$ .

On peut vérifier que  $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(Q) \subset D(0, \rho(A))$ , où  $D(0, \rho(A))$  est le disque ouvert de centre 0 et de rayon  $\rho(A)$ . Ici  $\rho(A)$  est le rayon spectral de  $A$ .

##### Proposition 2

Les deux suites  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  et  $(z_k)_{k \in \mathbb{N}}$  sont bien définies et on a

$$\|x_k - z_k\| \leq \frac{2|\lambda|^{-k}}{\|P x_0\|} \|Q^k x_0\| \quad (1.3)$$

pour tout  $k$  dans  $\mathbb{N}$ .

Pour l'inégalité (1.3), on pourra montrer que

$$\left\| \frac{z}{\|z\|} - \frac{x}{\|x\|} \right\| \leq \frac{2\|z - x\|}{\|x\|} \quad (1.4)$$

pour tous  $x$  et  $z$  non nuls de  $\mathbb{K}^n$ . Comme conséquence, on a

**Corollaire 3.** Si  $N$  est une norme sur  $\mathbb{K}^n$ , alors il existe  $c > 0$  tel que

$$\|x_k - z_k\| \leq \frac{2c \|x_0\|}{\|Px_0\|} |\lambda|^{-k} \mathbf{N}(Q)^k \quad (1.5)$$

où  $\mathbf{N}$  est la norme sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  subordonnée à la norme  $N$ .

**Corollaire 4.** Lorsque  $A$  est diagonalisable, il existe  $c > 0$  tel que

$$\|x_k - z_k\| \leq \frac{2c \|x_0\|}{\|Px_0\|} \left| \frac{\mu}{\lambda} \right|^k. \quad (1.6)$$

On pourra voir l'exercice 2 page 5 pour une preuve de ce dernier corollaire. En se basant sur cet exercice, on peut aussi montrer le résultat :

**Corollaire 5.** Lorsque  $A$  est non diagonalisable et  $\varepsilon \in ]0, |\lambda| - |\mu| [$ , il existe  $c > 0$  tel que

$$\|x_k - z_k\| \leq \frac{2c \|x_0\|}{\|Px_0\|} \left( \frac{|\mu| + \varepsilon}{|\lambda|} \right)^k. \quad (1.7)$$

En résumé, on a

**Proposition 6**

En déduire que pour tout  $\varepsilon \in ]0, |\lambda| - |\mu| [$ , il existe une constante  $C > 0$  telle que

$$|\langle x_k, Ax_k \rangle - \lambda| \leq C \left( \frac{|\mu| + \varepsilon}{|\lambda|} \right)^k \quad (1.8)$$

pour tout  $k$  dans  $\mathbb{N}$  lorsque  $A$  est non diagonalisable et qu'il existe une constante  $C > 0$  telle que

$$|\langle x_k, Ax_k \rangle - \lambda| \leq C \left| \frac{\mu}{\lambda} \right|^k \quad (1.9)$$

pour tout  $k$  dans  $\mathbb{N}$  lorsque  $A$  est diagonalisable.

Pour se convaincre, on pourra montrer cette dernière proposition en commençant par vérifier que

$$|\langle x, Ax \rangle - \langle z, Az \rangle| \leq 2 \|A\|_2 \|x - z\|_2,$$

où  $\|\cdot\|_2$  est la norme subordonnée à la norme euclidienne  $\|\cdot\|_2$ , pour tous  $x$  et  $z$  des vecteurs unitaires au sens de la norme  $\|\cdot\|_2$ . Pour une application, on pourra appliquer l'étude théorique ci-dessus à la matrice

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & 8 & -2 & -4 \\ 3 & 3 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

## 2 OBTENTION DE TOUTES LES VALEURS PROPRES.

On suppose que la matrice  $A$  admet  $n$  valeurs propres deux à deux distinctes et on se propose de déterminer une valeur propre donnée  $\lambda$  de  $A$ .

**Proposition 1**

Il existe  $r > 0$  tel que  $D(\lambda, r) \cap D(\gamma, r) = \emptyset$  pour toutes valeurs propres  $\alpha$  et  $\gamma$  de  $A$  telles que  $\alpha \neq \gamma$ , où  $D(z, r)$  est le disque ouvert de centre  $z$  et de rayon  $r$ .

En remarquant que si  $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \text{Sp}(A)$ , alors  $(\lambda - \alpha)^{-1}$  est une valeur propre de  $(A - \alpha I_n)^{-1}$  et que si nous avons un moyen pour choisir un point du disque  $D(\lambda, r)$ , alors l'étude du Paragraphe 1 permet l'obtention de la valeur propre  $\lambda$  ainsi qu'un vecteur propre associé.

$$A = \begin{pmatrix} -10 & 11 & -5 \\ -16 & 17 & -7 \\ -4 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

## SUGGESTION DE DÉVELOPPEMENT

Soulignons qu'il s'agit d'un menu à la carte et que vous pouvez choisir d'étudier certains points, pas tous, pas nécessairement dans l'ordre, et de façon plus ou moins fouillée. Vous pouvez aussi vous poser d'autres questions que celles indiquées plus bas. Il est très vivement souhaité que vos investigations comportent une partie traitée sur ordinateur.

- On pourra expliquer comment cette étude théorique peut être utilisée pour calculer un vecteur propre de  $A$  associé à la valeur propre dominante  $\lambda$  et écrire un programme pour le calculer pour la matrice proposée ou pour une matrice de votre choix.
  - Rappelons que le choix de  $x_0$  est contraint par la condition  $Px_0 \neq 0$ . On pourra expliquer pourquoi avec un choix aléatoire de  $x_0$  cette condition est toujours remplie et écrire un programme dans ce sens pour tester la validité de votre justification.
  -
- 1- 1-1- Vérifier que  $\Lambda$  est inversible puis déterminer  $A\Lambda$  et  $\Lambda J$  et en déduire le polynôme caractéristique  $\Delta_A(t)$  de  $A$  puis vérifier que  $A$  admet une valeur propre dominante que l'on précisera.
  - 1-2- Déterminer les matrices  $P$  et  $Q$  définies dans (1.1).
  - 1-3- Vérifier que  $A$  est non diagonalisable.
  - 1-4- Écrire en Python une fonction qui calcule les valeurs approchées de la valeur propre dominante et d'un vecteur propre associé à cette valeur propre dominante.

## 7.7 Texte 7 de l'épreuve de modélisation

AGRÉGATION DE MATHÉMATIQUES DU MAROC

SESSION 2021

### QUELQUES MODÈLES DE DYNAMIQUE DES POPULATIONS

*Le jury n'exige pas une compréhension exhaustive du texte. Vous êtes libre d'organiser votre présentation comme vous l'entendez. Des suggestions de développement, largement indépendantes les unes des autres, vous sont proposées en fin de texte. Ce ne sont que des suggestions et vous n'êtes pas tenu(e) de les suivre. Il vous est conseillé de mettre en lumière vos connaissances à partir du fil conducteur constitué par le texte. Le jury appréciera que la présentation soit accompagnée d'exemples traités sur ordinateur.*

#### 1. INTRODUCTION

La *dynamique des populations* s'intéresse, entre autres, à l'évolution en fonction du temps du nombre d'individus dans une population d'êtres vivants. L'approche *compartimentale* est très souvent utilisée dans la construction des modèles. Elle consiste à partitionner la population en compartiments disjoints dont la taille varie en fonction du temps. Chaque compartiment regroupe les individus qui se trouvent dans le même état (age, taille ou poids, ...). Les différentes connaissances dont on dispose en ce qui concerne la population étudiée sont ensuite utilisées pour déterminer les taux de transfert entre les différents compartiments.

On s'intéresse dans la suite à des *modèles discrets* : la variable d'évolution qui est le temps dans notre cas varie dans  $\mathbb{N}$ , et elle sera notée  $n$ . Ainsi, on s'intéresse à l'état de la population uniquement à intervalles de temps réguliers.

Supposons que la population étudiée est divisée en  $d$  compartiments, disons  $C_1, \dots, C_d$ , de manière que chaque individu se trouve à un instant donné  $n$  dans un seul compartiment. Si on note  $x_i^n$  le nombre d'individus qui se trouvent dans le compartiment  $C_i$  à l'instant  $n$  alors l'état à l'instant  $n$  de la population étudiée est représenté par le vecteur  $x^n = (x_1^n, \dots, x_d^n)^T \in \mathbb{R}_+^d$ . Les taux de transfert entre les différents compartiments  $C_i$  permettent d'établir la loi qui détermine  $x^{n+1}$  en fonction de  $x^n$  et de  $n$ . Dans la suite on s'intéresse à des modèles autonomes, c'est-à-dire du type

$$x^{n+1} = \phi(x^n),$$

où  $\phi : \mathbb{R}_+^d \longrightarrow \mathbb{R}_+^d$  est une application.

## 2. UN MODÈLE SIMPLE STRUCTURÉ PAR AGE

La population étudiée est compartimentée par tranches d'âge, et l'intervalle de temps est l'année. Si  $d$  est l'âge maximal que peut atteindre un individu de la population étudiée alors la population est divisée en  $d$  compartiments  $C_1, \dots, C_d$ , où  $C_i$  regroupe les individus dont l'âge est dans l'intervalle  $[i - 1, i[$ .

Nous allons étudier la dynamique de la population en question tenant compte uniquement des taux de fertilité et les taux de mortalité dans chaque compartiment  $C_i$ .

1. On note  $\mu_i \geq 0$  le taux de fertilité des individus dans le compartiment  $C_i$ . Ainsi, un individu du compartiment  $C_i$  aura en moyenne  $\mu_i$  enfants par an.
2. On note  $\tau_i \in ]0, 1[$  le taux de survie des individus du compartiment  $C_i$  durant une année. Ainsi, si  $x_i^n$  est le nombre d'individus dans  $C_i$  à l'instant  $n$  alors le nombre de ceux qui restent en vie après une année est  $\tau_i x_i^n$ . Ces individus entrent alors dans le compartiment  $C_{i+1}$ .

Considérons alors les matrices  $F, T \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$  données par

$$F = \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_d \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ \tau_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & \tau_{d-1} & 0 \end{pmatrix}$$

La loi d'évolution du modèle est alors donnée par

$$(1) \quad x^{n+1} = (F + T)x^n,$$

avec  $x^0 \in \mathbb{R}_+^d$ .

## 3. UN MODÈLE STRUCTURÉ PAR TAILLE

Dans ce modèle, la population étudiée est structurée par taille. Ainsi, de manière analogue au modèle précédent, si  $d$  est la taille maximale qu'un individu peut atteindre alors on divise la population en  $d$  compartiments  $C_1, \dots, C_d$  tels que  $C_i$  représente les individus ayant une taille dans l'intervalle  $[i - 1, i[$ . Comme dans le modèle structuré par âge, on note  $\mu_i$  et  $\tau_i$  respectivement le taux de fertilité et de survie dans le compartiment  $C_i$ .

1. On note  $\sigma_i \geq 0$  le taux d'individus dans le compartiment  $C_i$  ayant atteint une taille dans l'intervalle  $[i, i + 1[$  au bout d'une année.
2. On note  $\gamma_i > 0$  le taux d'individus du compartiment  $C_i$  dont la taille n'a pas changé au bout d'une année.

On a alors  $\sigma_d = 0$  et  $\gamma_i + \sigma_i = \tau_i$  pour tout  $1 \leq i \leq d$ . La dynamique du modèle suit alors la loi

$$(2) \quad x^{n+1} = (F + S)x^n,$$

où  $x^0 \in \mathbb{R}_+^d$  et

$$S = \begin{pmatrix} \gamma_1 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \sigma_1 & \gamma_2 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \dots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \gamma_{d-1} & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \sigma_{d-1} & \gamma_d \end{pmatrix}$$

#### 4. ÉTUDE DE LA DYNAMIQUE DES MODÈLES

Une caractéristique commune aux deux modèles est que les matrices qui y interviennent sont *positives*, c'est-à-dire tous leurs coefficients sont positifs.

On dit qu'une matrice  $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$  est *strictement positive*, et on note  $A > 0$ , si tous ses coefficients sont positifs. On dit qu'une matrice positive  $A$  est *primitive* s'il existe  $k \in \mathbb{N}^*$  tel que  $A^k > 0$ . On a alors le théorème important suivant.

**Théorème 4.1** (Perron-Frobenius). *Soit  $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$  une matrice positive. Alors  $\rho(A)$  est une valeur propre de  $A$ . Si en plus  $A$  est primitive alors on a les propriétés plus précises suivantes.*

1. La valeur propre  $\rho(A)$  est  $> 0$  et de multiplicité algébrique 1.
2. Il existe un vecteur propre  $v = (v_1, \dots, v_d)^T$  de  $A$  pour la valeur propre  $\rho(A)$  tel que  $v_i > 0$  pour tout  $i = 1, \dots, d$ .
3. Tout vecteur propre  $x$  de  $A$  tel que  $x \geq 0$  vérifie  $x = \alpha v$ , où  $\alpha \in \mathbb{R}_+$ .
4. Toute valeur propre  $\lambda$  de  $A$  autre que  $\rho(A)$  vérifie  $|\lambda| < \rho(A)$ .

Dans la suite on suppose que, dans les modèles, tous les compartiments d'âge (resp. de taille) sont fertiles c'est-à-dire que  $\mu_i > 0$  pour tout  $i = 1, \dots, d$ . Dans ce cas, les matrices  $F + T$  et  $F + S$  sont primitives. En plus, en utilisant le théorème de Perron-Frobenius, on peut prédire le comportement asymptotique de la population totale

en fonction de la valeur du rayon spectral de la matrice du modèle en question.

**Corollaire 4.2.** *Pour tout  $x^0 > 0$  on a les propriétés suivantes.*

1. *Si  $\rho(F + T) > 1$  la population totale  $X^n = \sum x_i^n$  tend vers  $+\infty$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ .*
2. *Si  $\rho(F + T) = 1$  la population totale  $X^n$  tend vers une valeur strictement positive lorsque  $n \rightarrow +\infty$ .*
3. *Si  $\rho(F + T) < 1$  la population totale  $X^n$  tend vers 0 lorsque  $n \rightarrow +\infty$ .*

## 5. SUGGESTIONS POUR LE DÉVELOPPEMENT

Cette section ne contient qu'un petit nombre de suggestions. Vous pouvez choisir d'étudier certains points seulement, de façon plus ou moins approfondie, et pas nécessairement dans l'ordre. Vous pouvez aussi vous poser d'autres questions que celles indiquées ci-dessous. Il est vivement souhaité que vos investigations comportent une partie traitée sur ordinateur et, si possible, des représentations graphiques.

1. Expliquer pourquoi l'évolution du modèle de la section 2 est donnée par l'équation (1).
2. Sous l'hypothèse que  $\mu_i > 0$  pour tout  $i$ , montrer que la matrice  $F + T$  est primitive.
3. À l'aide de l'outil informatique, étudier l'évolution du modèle structuré par âge, donné par l'équation (1). On veillera à donner un exemple pour chaque comportement possible, et faire des représentations graphiques lorsque c'est possible.
4. En remarquant que la transposée d'une matrice primitive est primitive et en utilisant le théorème de Perron-Frobenius montrer le corollaire 4.2.
5. Dans le cas où  $\rho(F + T) = 1$  montrer que la suite  $(x^n)_n$  du modèle (1) est convergente, et exprimer sa limite en fonction de la valeur initiale  $x^0$ .
6. À l'aide de l'outil informatique, étudier l'évolution du modèle structuré par taille donné par l'équation (2).

# Chapitre 8

## Programme du concours de l'agrégation - Session 2021

Le programme des épreuves de l'agrégation n'est pas rédigé comme un plan de cours. Il décrit un ensemble de connaissances que le candidat doit maîtriser et savoir illustrer. Il comporte des répétitions lorsque des notions interviennent naturellement suivant différents points de vue. Le programme évoque parfois des exemples; ceux-ci sont donnés à titre purement indicatif et peuvent être remplacés par d'autres qui seraient également pertinents.

Dans les titres 1 à 5 qui suivent, tous les corps (notés  $K$  en général) sont supposés commutatifs.

### 8.1 Algèbre linéaire

#### 8.1.1 Espaces vectoriels

1. Espaces vectoriels, applications linéaires. Produit d'espaces vectoriels. Sous-espaces, image et noyau d'une application linéaire. Espaces quotients. Somme de sous-espaces, somme directe, supplémentaires. Familles libres, familles génératrices ; bases. Algèbre des endomorphismes d'un espace vectoriel  $E$ , groupe linéaire  $GL(E)$ .
2. Sous-espaces et tables d'un endomorphisme. Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres.
3. Représentations linéaires d'un groupe. Irréductibilité. En dimension finie : exemples de décomposition d'une représentation linéaire en somme directe de sous-représentations, lemme de Schur.

#### 8.1.2 Espaces vectoriels de dimension finie

1. Espaces vectoriels de dimension finie. Existence de bases : isomorphisme avec  $K^n$ . Existence de supplémentaires d'un sous-espace. Rang d'une application linéaire, rang d'un système de vecteurs. Espace dual. Rang d'un système d'équations linéaires. Transposée d'une application linéaire. Base duale. Bidualité. Orthogonalité.
2. Applications multilinéaires. Déterminant d'un système de vecteurs, d'un endomorphisme. Groupe spécial linéaire  $SL(E)$ . Orientation d'un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.
3. Matrices à coefficients dans un anneau commutatif. Opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes, déterminant, inversibilité.

Matrices à coefficients dans un corps. Rang d'une matrice. Représentations matricielles d'une application linéaire. Changement de base.

Méthode du pivot de Gauss. Notion de matrices échelonnées. Applications à la résolution de systèmes d'équations linéaires, au calcul de déterminants, à l'inversion des matrices carrées, à la détermination du rang d'une matrice, à la détermination d'équations définissant un sous-espace vectoriel.

4. Sous-espaces stables d'un endomorphisme, lemme des noyaux. Polynôme caractéristique. Polynômes d'endomorphismes. Polynômes annulateurs, polynôme minimal. Théorème de Cayley-Hamilton. Diagonalisation, trigonalisation. Sous-espaces caractéristiques, décomposition de Dunford. Exponentielle des matrices réelles ou complexes.

## 8.2 Groupes

Les différentes notions de théorie des groupes introduites dans les paragraphes suivants pourront être illustrées et appliquées dans des situations géométriques.

1. Groupes, morphismes de groupes. Produit direct de groupes. Sous-groupes. Sous-groupe engendré par une partie. Ordre d'un élément. Sous-groupes distingués (ou normaux), groupes quotients. Action d'un groupe sur un ensemble. Stabilisateur d'un point, orbites, espace quotient. Formule des classes. Classes de conjugaison. Application à la détermination des groupes d'isométries d'un polytope régulier en dimension 2 et 3.
2. Groupes cycliques. Groupes abéliens de type fini. Groupe des racines complexes  $n$ -ièmes de l'unité, racines primitives.
3. Groupe des permutations d'un ensemble fini. Décomposition d'une permutation en produit de transpositions, en produit de cycles à supports disjoints. Signature. Groupe alterné. Application : déterminants.
4. Définition des groupes classiques d'automorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie : groupe général linéaire, groupe spécial linéaire; groupe orthogonal, groupe spécial orthogonal; groupe unitaire, groupe spécial unitaire.
5. Représentations d'un groupe fini sur un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel. Cas d'un groupe abélien. Orthogonalité des caractères irréductibles. Groupe dual. Transformée de Fourier. Convolution. Cas général. Théorème de Maschke. Caractères d'une représentation de dimension finie. Fonctions centrales sur le groupe, base orthonormée des caractères irréductibles. Exemples de représentations de groupes de petit cardinal.

## 8.3 Groupes Anneaux, corps et polynômes

1. Anneaux (unitaires), morphisme d'anneaux, sous-anneaux. L'anneau  $\mathbb{Z}$  des entiers relatifs. Produit d'anneaux. Idéaux d'un anneau commutatif, anneaux quotients, idéaux premiers, idéaux maximaux. Notion d'algèbre (associative ou non) sur un anneau commutatif.
2. Algèbre des polynômes à une ou plusieurs indéterminées sur un anneau commutatif. Décomposition en somme de polynômes homogènes. Polynômes symétriques.
3. Corps, sous-corps. Caractéristique. Extension de corps. Corps des fractions d'un anneau intègre. Le corps  $\mathbb{Q}$  des nombres rationnels. Le corps  $\mathbb{R}$  des nombres réels. Le corps  $\mathbb{C}$  des nombres complexes. Théorème de d'Alembert-Gauss.

4. Divisibilité dans les anneaux commutatifs intègres. Éléments irréductibles, éléments inversibles, éléments premiers entre eux. Anneaux factoriels. Plus grand diviseur commun, plus petit multiple commun.

Factorialité de  $A[X]$  quand  $A$  est un anneau factoriel. Anneaux principaux. Théorème de Bézout. Anneaux euclidiens. Algorithme d'Euclide. Cas de l'anneau  $Z$  et de l'algèbre  $K[X]$  des polynômes sur le corps  $K$ . Polynômes irréductibles. Exemples : polynômes cyclotomiques dans  $Q[X]$ , critère d'Eisenstein.

5. Congruences dans  $Z$ . Nombres premiers. Étude de l'anneau  $Z/nZ$  et de ses éléments inversibles, fonction indicatrice d'Euler. Théorème chinois.
6. Racines d'un polynôme, multiplicité. Relations entre les coefficients et les racines d'un polynôme scindé. Sommes de Newton. Polynôme dérivé. Éléments algébriques et transcendants. Extensions algébriques. Corps algébriquement clos. Corps de rupture et corps de décomposition. Corps finis. Morphisme de Frobenius.
7. Corps des fractions rationnelles à une indéterminée sur un corps. Décomposition en éléments simples. Cas réel et complexe.

## 8.4 Formes bilinéaires et quadratiques sur un espace vectoriel

1. Formes bilinéaires. Formes bilinéaires alternées. Formes bilinéaires symétriques, formes quadratiques, forme polaire d'une forme quadratique (en caractéristique différente de 2). Éléments orthogonaux, interprétation géométrique. Formes non dégénérées. Adjoint d'un endomorphisme. Représentation matricielle, changement de base. Rang d'une forme bilinéaire.
2. Orthogonalité. Sous-espaces isotropes. Décomposition d'une forme quadratique en somme de carrés. Théorème d'inertie de Sylvester. Classification dans le cas de  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Procédés d'orthogonalisation.
3. Espaces vectoriels euclidiens, espaces vectoriels hermitiens. Isomorphisme d'un espace vectoriel euclidien avec son dual. Supplémentaire orthogonal. Inégalité de Cauchy-Schwarz. Norme. Bases orthonormales.
4. Groupe orthogonal, groupe spécial orthogonal. Exemple de générateurs du groupe orthogonal : décomposition d'un automorphisme orthogonal en produit de réflexions. Endomorphismes symétriques, endomorphismes normaux. Diagonalisation d'un endomorphisme symétrique. Réduction simultanée de deux formes quadratiques réelles, l'une étant définie positive. Décomposition polaire dans  $GL(n, \mathbb{R})$ . Espaces vectoriels euclidiens de dimension 2, classification des éléments de  $O(2, \mathbb{R})$ . Espaces vectoriels euclidiens de dimension 3, classification des éléments de  $O(3, \mathbb{R})$ ; produit mixte, produit vectoriel.
5. Groupe unitaire, groupe spécial unitaire. Diagonalisation des endomorphismes normaux. Décomposition polaire dans  $GL(n, \mathbb{C})$ .

## 8.5 Géométrie affine et euclidienne

Tous les espaces considérés dans ce chapitre sont de dimension finie.

1. Espace affine et espace vectoriel associé. Application affine et application linéaire associée. Sous-espaces affines, barycentres. Repères affines, équations d'un sous-espace affine. Groupe affine, notion de propriété affine. Groupe des homothéties-translations, affinités. Parties convexes, enveloppe convexe d'une partie d'un espace affine réel, points extrémaux.
2. Isométries d'un espace affine euclidien. Groupe des isométries d'un espace affine euclidien. Déplacements, antidéplacements. Similitudes directes et indirectes du plan. Classification des isométries en dimension deux et trois.
3. Angles en dimension 2 : angles de vecteurs, angles de droites, Théorème de l'angle inscrit, cocyclicité.
4. Groupe des isométries laissant stable une partie du plan ou de l'espace. Polygones réguliers. Relations métriques dans le triangle. Utilisation des nombres complexes en géométrie plane.
5. Application des formes quadratiques à l'étude des coniques propres du plan affine euclidien (foyer, excentricité) et des quadriques de l'espace affine euclidien de dimension 3.

## 8.6 Analyse à une variable réelle

### 8.6.1 Nombres réels

Le corps  $\mathbb{R}$  des nombres réels. Topologie de  $\mathbb{R}$ . Sous-groupes additifs de  $\mathbb{R}$ . Suites de nombres réels : convergence, valeur d'adhérence. Suites récurrentes. Limites inférieure et supérieure. Suites de Cauchy. Complétude de  $\mathbb{R}$ . Théorème de Bolzano-Weierstrass. Parties compactes de  $\mathbb{R}$ . Parties connexes de  $\mathbb{R}$ .

### 8.6.2 Séries numériques

Convergence des séries à termes réels. Séries géométriques, séries de Riemann. Séries à termes positifs. Somme des relations de comparaison. Comparaison d'une série et d'une intégrale. Estimations des restes. Convergence absolue. Produits de séries. Séries alternées.

### 8.6.3 Fonctions définies sur une partie de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles

1. Continuité  
Limites, continuité. Théorème des valeurs intermédiaires, image d'un segment. Étude de la continuité des fonctions monotones. Continuité d'une fonction réciproque.
2. Dérivabilité  
Dérivée en un point, fonctions dérivables. Dérivée d'une fonction composée. Dérivée d'une fonction réciproque. Théorèmes de Rolle et des accroissements finis. Étude des variations d'une fonction. Dérivées d'ordre supérieur. Applications de classe  $C^k$ , de classe  $C^k$  par morceaux. Formule de Leibniz. Formule de Taylor-Young, formule de Taylor avec reste intégral, formule de Taylor-Lagrange. Calcul de développements limités et de développements asymptotiques.

### 8.6.4 Fonctions usuelles

Fonctions polynômes, fonctions rationnelles. Logarithmes. Exponentielles. Fonctions puissances. Fonctions circulaires et hyperboliques. Fonctions circulaires et hyperboliques réciproques.

### 8.6.5 Intégration

1. Intégrale sur un segment des fonctions continues par morceaux Calcul de primitives. Sommes de Riemann. Primitives d'une fonction continue. Méthodes usuelles de calcul d'intégrales. Changement de variable. Intégration par parties.
2. Intégrales généralisées Intégrales absolument convergentes. Intégration des relations de comparaison. Intégrales semi- convergentes.

### 8.6.6 Suites et séries de fonctions

Convergence simple, convergence uniforme. Continuité et dérivabilité de la limite. Cas des séries de fonctions ; convergence normale.

Théorèmes d'approximation de Weierstrass polynomial et de Weierstrass trigonométrique.

### 8.6.7 Convexité

Fonctions convexes d'une variable réelle. Continuité et dérivabilité des fonctions convexes. Caractérisations de la convexité. Inégalités de convexité.

## 8.7 Analyse à une variable complexe

### 8.7.1 Séries entières

1. Rayon de convergence. Propriétés de la somme d'une série entière sur son disque de convergence : continuité, dérivabilité par rapport à la variable complexe, primitives.
2. Exponentielle complexe; propriétés. Extension des fonctions circulaires au domaine complexe. Développement en série entière des fonctions usuelles.

### 8.7.2 Fonctions d'une variable complexe

1. Fonctions holomorphes. Conditions de Cauchy-Riemann. Intégrale d'une fonction continue le long d'un chemin  $C^1$  par morceaux. Primitives d'une fonction holomorphe. Déterminations du logarithme. Théorème d'holomorphie sous le signe intégrale.
2. Indice d'un chemin fermé  $C^1$  par morceaux par rapport à un point.
3. Formules de Cauchy. Analyticité d'une fonction holomorphe. Principe des zéros isolés. Principe du prolongement analytique. Principe du maximum.
4. Singularités isolées. Séries de Laurent. Fonctions méromorphes. Théorème des résidus.
5. Suites et séries de fonctions holomorphes. Stabilité de l'holomorphie par convergence uniforme.

## 8.8 Topologie

### 8.8.1 Topologie et espaces métriques

1. Topologie d'un espace métrique. Topologie induite. Produit fini d'espaces métriques.

2. Suites. Valeurs d'adhérence. Limites. Applications continues. Homéomorphismes.
3. Compacité. Équivalence des définitions en termes de valeurs d'adhérence (Bolzano-Weierstrass) ou de recouvrements ouverts (Borel-Lebesgue). Connexité. Composantes connexes. Connexité par arcs.
4. Applications lipschitziennes, applications uniformément continues. Théorème de Heine.
5. Espaces métriques complets. Théorème du point fixe pour les applications contractantes.

### 8.8.2 Espaces vectoriels normés sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

1. Topologie d'un espace vectoriel normé. Normes équivalentes. Cas des espaces de dimension finie. Normes  $\|\cdot\|_p$  sur  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathbb{C}^n$ . Espaces de Banach. Séries absolument convergentes dans un espace de Banach.
2. Applications linéaires continues, norme d'une application linéaire continue.
3. Norme de la convergence uniforme. Espace des fonctions continues bornées sur un espace métrique, à valeurs dans un espace de Banach.
4. Étude de la compacité de parties d'un espace vectoriel normé : théorème de Riesz, théorème d'Ascoli.

### 8.8.3 Espaces de Hilbert

1. Projection sur un convexe fermé. Projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel fermé.
2. Dual d'un espace de Hilbert, théorème de représentation de Riesz. Cas des espaces  $l^2$  et  $L^2$ . Bases hilbertiennes (dans le cas séparable). Exemples de bases de polynômes trigonométriques et de polynômes orthogonaux. Théorème de Lax-Milgram. (
3. Espace  $H_0^1(]0, 1[)$  et application au problème de Dirichlet en dimension 1.

## 8.9 Calcul différentiel

### 8.9.1 Fonctions différentiables

1. Applications différentiables sur un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . Différentielle (application linéaire tangente). Dérivée selon un vecteur.
2. Dérivées partielles. Matrice jacobienne, vecteur gradient, matrice hessienne. Composition d'applications différentiables. Théorème des accroissements finis. Applications de classe  $C^1$ .
3. Applications de classe  $C^k$ . Dérivées partielles d'ordre  $k$ . Interversion de l'ordre des dérivations. Formule de Taylor-Young, formule de Taylor avec reste intégral.
4. Étude locale des applications à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . Développements limités. Recherche des extrema locaux, caractérisation de la convexité des fonctions de classe  $C^1$  et  $C^2$  définies sur un ouvert convexe  $\mathbb{R}^n$ .
5. Difféomorphismes. Théorème d'inversion locale. Théorème des fonctions implicites.

### 8.9.2 Équations différentielles—

1. Équations différentielles de la forme  $X' = f(t, X)$  sur  $I \times \Omega$  avec  $I$  intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$  et  $\Omega$  ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . Théorème de Cauchy-Lipschitz. Solutions maximales. Lemme de Gronwall. Théorème de sortie de tout compact (théorème “des bouts”).
2. Cas des équations différentielles autonomes. Portrait de phase, comportement qualitatif. Stabilité des points d'équilibre (théorème de linéarisation).
3. Systèmes différentiels linéaires. Méthode de variation des constantes (formule de Duhamel). Cas des coefficients constants. Application à la résolution d'équations différentielles linéaires d'ordre supérieur à 1.

### 8.9.3 Géométrie différentielle

1. Sous-variétés de  $\mathbb{R}^n$ . Définitions équivalentes : graphe local, paramétrisation locale, équation locale. Espace tangent. Gradient. Cas des surfaces de  $\mathbb{R}^3$ , position par rapport au plan tangent.
2. Construction de courbes planes définies par une représentation paramétrique. Étude métrique des courbes : abscisse curviligne, longueur d'un arc  $C^1$ .
3. Extrema liés, multiplicateurs de Lagrange.

## 8.10 Calcul intégral

### 8.10.1 Notions de théorie de la mesure

Définition des espaces mesurables, tribu produit, cas particulier des tribus boréliennes. Définition d'une mesure positive, cas particuliers de la mesure de comptage, de la mesure de Lebesgue (construction admise) et des mesures de probabilité. Définition d'une mesure produit (construction admise). Définition des fonctions mesurables, approximation par des fonctions étagées.

### 8.10.2 Intégration

1. Intégrale des fonctions mesurables positives, théorème de convergence monotone. Lemme de Fatou. Fonctions intégrables, théorème de convergence dominée.
2. Fonctions intégrables à valeurs dans un espace vectoriel de dimension finie. Continuité, dérivabilité des intégrales à paramètres.
3. Espaces  $L^p$ , où  $1 \leq p \leq \infty$ . Complétude. Inégalité de Holder.
4. Théorème de Fubini. Changement de variables dans une intégrale multiple. Cas des coordonnées polaires, cas des coordonnées sphériques.
5. Convolution. Régularisation et approximation par convolution.

### 8.10.3 Analyse de Fourier

1. Séries de Fourier des fonctions localement intégrables périodiques d'une variable réelle. Lemme de Riemann-Lebesgue. Produit de convolution de fonctions périodiques. Théorèmes de Dirichlet, de Fejer et de Parseval.
2. Transformation de Fourier sur les espaces  $L^1(\mathbb{R}^d)$  et  $L^2(\mathbb{R}^d)$ . Théorème de Plancherel.

## 8.11 Probabilités

### 8.11.1 Définition d'un espace probabilisé

Événements, tribus, mesure de probabilité. Indépendance d'événements et de tribus. Loi du 0-1, lemmes de Borel-Cantelli. Probabilités conditionnelles. Formule des probabilités totales.

### 8.11.2 Variables aléatoires, loi d'une variable aléatoire

1. Loi discrète, loi absolument continue. Fonction de répartition et densité. Loi conjointe de variables aléatoires, indépendance de variables aléatoires. Espérance et variance d'une variable aléatoire à valeurs réelles, théorème de transfert. Moments. Exemples de lois : loi de Bernoulli, binomiale, géométrique, de Poisson, uniforme, exponentielle, de Gauss.
2. Fonction caractéristique. Fonction génératrice d'une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{N}$ . Application aux sommes de variables aléatoires indépendantes.

### 8.11.3 Convergences de suites de variables aléatoires

1. Convergence en probabilité, dans  $L^p$ , presque sûrement, en loi. Inégalité de Markov, inégalité de Bienaymé-Tchebychev, théorème de Lévy.
2. Loi faible et loi forte des grands nombres. Théorème central limite.

## 8.12 Distributions

### 8.12.1 Espaces $S(\mathbb{R}^d)$ et $S'(\mathbb{R}^d)$

1. Espace de Schwartz  $S(\mathbb{R}^d)$  des fonctions à décroissance rapide. Transformation de Fourier sur  $S(\mathbb{R}^d)$ . Convolution de deux fonctions de  $S(\mathbb{R}^d)$ . Multiplication par une fonction  $C^\infty$  à croissance lente.
2. Espace  $S'(\mathbb{R}^d)$  des distributions tempérées. Dérivation des distributions tempérées. Convolution d'une distribution tempérée avec une fonction de  $S(\mathbb{R}^d)$ . Multiplication par une fonction  $C^\infty$  à croissance lente. Exemples de distributions tempérées : fonctions localement intégrables, masse de Dirac, valeur principale de Cauchy, cas des fonctions périodiques, peigne de Dirac.
3. Transformation de Fourier dans  $S'(\mathbb{R}^d)$ . Formule d'inversion. Transformation de Fourier et dérivation, Transformée de Fourier d'un produit de convolution.

### 8.12.2 Applications

Calcul de dérivées et de transformée de Fourier de distributions. Formule de Poisson (dimension un). Notion de solution élémentaire d'opérateurs différentiels à coefficients constants (cas du laplacien). Notion de solution faible d'équations aux dérivées partielles linéaires : application, par exemple, à la résolution des équations de Laplace, de la chaleur, des ondes. Utilisation de la convolution et de la transformée de Fourier-Laplace pour la résolution d'équations différentielles linéaires en dimension 1.

## 8.13 Méthodes numériques

### 8.13.1 Résolution de systèmes d'équations linéaires

Notion de conditionnement. Théorème de Gershgorin-Hadamard. Pivot de Gauss, décomposition  $LU$ . Méthodes itératives (par exemple méthode de Jacobi, méthode de Gauss-Seidel); analyse de convergence : normes subordonnées, rayon spectral.

Décomposition en valeurs singulières.

Exemple de la matrice de discrétisation par différences finies du laplacien  $1D$ .

### 8.13.2 Méthodes itératives de résolution approchée d'équations réelles et vectorielles

Cas des systèmes linéaires : méthodes itératives. Recherche d'éléments propres : méthode de la puissance. Optimisation de fonctions convexes en dimension finie, méthode du gradient à pas constant, moindres carrés. Problèmes non linéaires réels et vectoriels : méthode de dichotomie, méthode de Picard, méthode de Newton, vitesse de convergence et estimation de l'erreur.

### 8.13.3 Intégration numérique

Méthode des rectangles, estimation de l'erreur. Méthode de Monte-Carlo : vitesse de convergence, application au calcul d'intégrales multiples.

### 8.13.4 Approximation de fonctions numériques

Interpolation de Lagrange : polynôme de Lagrange d'une fonction en  $(n + 1)$  points, estimation de l'erreur.

13.5 Équations différentielles ordinaires Aspects numériques du problème de Cauchy : méthode d'Euler explicite, consistance, stabilité, convergence, ordre.

### 8.13.5 Transformée de Fourier

Transformée de Fourier discrète sur un groupe abélien fini. Transformée de Fourier rapide.



## Chapitre 9

# Anexe : Sujets du concours

### 9.1 Épreuve écrite de mathématiques générales

SESSION 2021

---

**AGREGATION  
CONCOURS EXTERNE**

Section : MATHÉMATIQUES

**COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES**

Durée : 6 heures

---

*L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout matériel électronique (y compris la calculatrice) est rigoureusement interdit.*

*Si vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, vous devez le signaler très lisiblement sur votre copie, en proposer la correction et poursuivre l'épreuve en conséquence. De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, vous devez la (ou les) mentionner explicitement.*

**NB : Conformément au principe d'anonymat, votre copie ne doit comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé consiste notamment en la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de la signer ou de l'identifier.**

**Tournez la page S.V.P.**

## INFORMATION AUX CANDIDATS

Vous trouverez ci-après les codes nécessaires vous permettant de compléter les rubriques figurant en en-tête de votre copie.

Ces codes doivent être reportés sur chacune des copies que vous remettrez.

Concours	Section/option	Epreuve	Matière
EAE	1300A	101	0376

Les calculatrices, téléphones, tablettes, ordinateurs, montres connectées et tous appareils électroniques de communication ou de stockage, ainsi que les documents sont interdits.

La qualité de la rédaction est un facteur important d'appréciation des copies. Les candidats sont donc invités à produire des raisonnements clairs, complets et concis.

Les candidats peuvent utiliser les résultats énoncés dans les questions ou parties précédentes, en veillant dans ce cas à préciser la référence du résultat utilisé.

## Notations, vocabulaire et rappels

- On désigne par  $\mathbf{Z}$  l'anneau des entiers relatifs,  $\mathbf{Q}$  le corps des nombres rationnels,  $\mathcal{P}$  l'ensemble des nombres premiers.
- Soit  $A$  un anneau commutatif, unitaire (c'est-à-dire possédant un élément neutre pour la multiplication).

- $A^\times$  désigne le groupe des éléments inversibles de  $A$ .
- On note  $A[X]$  l'anneau des polynômes à coefficients dans  $A$  et, pour tout entier naturel  $n$ ,  $A_n[X]$  l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à  $n$  à coefficients dans  $A$ .
- On dénote par  $\mathcal{M}_n(A)$  l'anneau des matrices  $(n, n)$  à coefficients dans  $A$  et  $\mathcal{T}_n(A)$  l'ensemble des matrices  $(n, n)$  triangulaires inférieures à coefficients dans  $A$ .
- Un polynôme de  $A[X]$  est dit *unitaire* lorsque son coefficient dominant est 1.
- Une fonction  $f$  de  $A$  dans  $A$  est dite *polynomiale* s'il existe un polynôme  $P$  dans  $A[X]$  tel que :

$$\forall a \in A, f(a) = P(a).$$

- Par convention, un produit d'éléments de  $A$  indexé sur l'ensemble vide est égal à 1.
- Soient  $k$  et  $n$  deux entiers naturels. On désigne par  $\binom{n}{k}$  le coefficient binomial "k parmi n", c'est-à-dire le nombre de possibilités de choisir  $k$  éléments dans un ensemble à  $n$  éléments; si  $n = k = 0$ , ce nombre vaut 1. Si  $k > n$ , cette quantité est nulle, par convention.
- Pour tout entier naturel  $k$ , on introduit le polynôme à coefficients rationnels

$$H_k(X) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \\ \frac{X(X-1)\dots(X-k+1)}{k!} & \text{sinon.} \end{cases}$$

- On définit l'anneau des *entiers de Gauss* de la manière suivante :

$$\mathbf{Z}[i] = \{a + ib; a, b \in \mathbf{Z}\}.$$

Si  $z$  est un entier de Gauss et  $a, b$  sont les entiers tels que  $z = a + ib$ , on note

$$N(z) = z\bar{z} = (a + ib)(a - ib).$$

— On introduit l'opération de *dérivation discrète* :

$$\begin{aligned} \Delta : \mathbf{Q}[X] &\rightarrow \mathbf{Q}[X] \\ P(X) &\mapsto P(X+1) - P(X) \end{aligned}$$

On définit les itérées de cette opération par récurrence :

$$\forall P \in \mathbf{Q}[X], \Delta^0(P) = P \text{ et } \forall k \in \mathbf{N}^*, \Delta^k(P) = \Delta(\Delta^{k-1}(P)).$$

— On rappelle la définition d'un *polynôme interpolateur de Lagrange*. Soit  $n \in \mathbf{N}$ . Soit  $k \in \{0, \dots, n\}$ . Le polynôme  $L_k^n(X)$  est l'unique polynôme de degré  $n$  de  $\mathbf{Q}[X]$  tel que, pour tout  $h \in \{0, \dots, n\}$ ,  $L_k^n(h) = \delta_{kh}$  où  $\delta_{kh}$  est le symbole de Kronecker (il vaut 0 si  $k \neq h$  et 1 si  $k = h$ ). Plus précisément,

$$L_k^n(X) = \prod_{i=0, i \neq k}^n \frac{X - i}{k - i}.$$

# Exercices Préliminaires

## Exercice 1

1. Justifier que les polynômes  $H_0, H_1, H_2$  et  $H_3$  forment une famille libre dans  $\mathbf{Q}[X]$ .
2. Expliciter le sous-espace vectoriel  $\mathcal{F}$  de  $\mathbf{Q}[X]$  engendré par les polynômes  $H_0, H_1, H_2$  et  $H_3$ .
3. Justifier que  $\Delta$  induit un endomorphisme sur  $\mathcal{F}$ .

On note  $\Delta_{\mathcal{F}}$  l'endomorphisme induit par  $\Delta$  sur  $\mathcal{F}$ .

4. Déterminer le polynôme caractéristique de  $\Delta_{\mathcal{F}}$ .
5. Déterminer le polynôme minimal de  $\Delta_{\mathcal{F}}$ .
6. L'endomorphisme  $\Delta_{\mathcal{F}}$  est-il diagonalisable ?

## Exercice 2

Soit  $k$  un corps.

Soit  $n$  un entier naturel. Pour  $n + 1$  éléments de  $k, x_0, \dots, x_n$ , on note  $V(x_0, \dots, x_n)$  la matrice dans  $\mathcal{M}_{n+1}(k)$  définie par

$$V(x_0, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix}$$

1. Soient  $a_0, a_1, \dots, a_n$  dans  $k$  et soit  $P$  le polynôme  $P = \sum_{j=0}^n a_j X^j$ . Expliciter en fonction de  $P$  et  $x_0, \dots, x_n$  le vecteur :

$$V(x_0, \dots, x_n) \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

2. Justifier qu'il existe une matrice  $T$  dans  $\mathcal{M}_{n+1}(k)$ , de déterminant 1, telle que

$$V(x_0, \dots, x_n)T = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^{n-1} & 0 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} & 0 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} & \prod_{i=0}^{n-1} (x_n - x_i) \end{pmatrix}$$

3. En déduire, par récurrence, une expression du déterminant de  $V(x_0, \dots, x_n)$  en fonction de  $x_0, \dots, x_n$ .

Soit  $K$  un corps tel que  $k \subset K$ .

4. Soit  $P$  un polynôme dans  $K[X]$  de degré  $n$  tel que  $P(k) \subset k$ . Soient  $a_0, a_1, \dots, a_n$  dans  $K$  tels que  $P = \sum_{j=0}^n a_j X^j$ . On suppose que  $k$  contient  $n + 1$  éléments distincts  $x_0, \dots, x_n$ . Démontrer que  $P \in k[X]$ .

*Indication* : On pourra utiliser  $V(x_0, \dots, x_n) \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ .

5. On note  $\mathcal{E} = \{P \in K[X] \mid P(k) \subset k\}$ .

(a) On suppose que  $k$  est un corps infini. Démontrer que

$$\mathcal{E} = k[X].$$

(b) On suppose que  $k$  est un corps fini. On note  $q$  son cardinal. On note  $\mathcal{I}$  l'idéal de  $K[X]$  engendré par le polynôme  $X^q - X$ . Démontrer que

$$\mathcal{E} = \{P + Q \mid P \in \mathcal{I} \text{ et } Q \in k[X]\}$$

### Exercice 3

On définit

$$\text{Ent}(\mathcal{T}_2(\mathbf{Z})) = \{P \in \mathbf{Q}[X] \mid P(\mathcal{T}_2(\mathbf{Z})) \subseteq \mathcal{M}_2(\mathbf{Z})\}.$$

Pour deux entiers  $x_0, x_1 \in \mathbf{Z}$ , on pose

$$\phi(P)(x_0, x_1) = \begin{cases} \frac{P(x_1) - P(x_0)}{x_1 - x_0}, & \text{si } x_1 \neq x_0; \\ P'(x_0), & \text{sinon.} \end{cases}$$

- Soient  $x_0, x_1 \in \mathbf{Z}$ . Soit  $P \in \mathbf{Q}[X]$ . Exprimer le reste de la division euclidienne de  $P$  par  $(X - x_0)(X - x_1)$  en fonction de  $x_0$ ,  $\phi(P)(x_0, x_1)$  et  $P(x_0)$ .
- En déduire que

$$\text{Ent}(\mathcal{T}_2(\mathbf{Z})) = \{P \in \mathbf{Q}[X] \mid P(\mathbf{Z}) \subset \mathbf{Z} \text{ et } \phi(P)(\mathbf{Z}^2) \subseteq \mathbf{Z}\}.$$

*Indication* : Etant donné  $P \in \mathbf{Q}[X]$ , on pourra exprimer en fonction de  $y$ ,  $\phi(P)(x_0, x_1)$ ,  $P(x_0)$  et  $P(x_1)$  la matrice  $P(T)$  pour toute matrice

$$T = \begin{pmatrix} x_0 & 0 \\ y & x_1 \end{pmatrix}, x_0, x_1, y \text{ dans } \mathbf{Z}.$$

### Exercice 4

Soit  $p$  un nombre premier.

- Démontrer que toute fonction de  $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$  dans lui-même est polynomiale.
- Déterminer le nombre de fonctions polynomiales de  $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$  dans lui-même.
- Donner un exemple de fonction de  $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$  dans lui-même qui n'est pas polynomiale.

# Problème

## Notations et définitions.

- Soit  $A$  un anneau intègre ; on note  $\mathbf{K}$  son corps de fractions.  
Un polynôme  $P$  de  $\mathbf{K}[X]$  est dit à *valeurs entières* sur  $A$  lorsque  $P(A) \subseteq A$ .
- Soit  $E$  un sous-ensemble de  $A$ .
  - On définit

$$\text{Ent}(E, A) = \{P \in \mathbf{K}[X] \mid P(E) \subseteq A\}$$

et, pour tout entier naturel  $n$ ,

$$\text{Ent}_n(E, A) = \{P \in \mathbf{K}_n[X] \mid P(E) \subseteq A\}.$$

On admettra **sans le vérifier** que  $\text{Ent}(A)$  est un anneau.

Lorsque  $E = A$ , on note plus simplement  $\text{Ent}(A)$  et  $\text{Ent}_n(A)$  pour  $\text{Ent}(A, A)$  et  $\text{Ent}_n(A, A)$  respectivement.

- Soit  $n$  un entier naturel. On dit qu'une famille  $P_0, \dots, P_n$  est une *base régulière* de  $\text{Ent}_n(E, A)$  si pour tout entier  $k$  compris entre 0 et  $n$ ,  $P_k$  est un polynôme dans  $\text{Ent}(E, A)$  de degré  $k$ , et pour tout  $P \in \text{Ent}_n(E, A)$ , il existe d'unique  $\lambda_0, \dots, \lambda_n$  dans  $A$ , tels que

$$P(X) = \sum_{i=0}^n \lambda_i P_i(X).$$

- On dit qu'une famille  $(P_n)_{n \in \mathbf{N}}$  est une *base régulière* de  $\text{Ent}(E, A)$  si pour tout entier naturel  $n$ ,  $P_0, \dots, P_n$  est une base régulière de  $\text{Ent}_n(E, A)$ .

Le problème est divisé en quatre parties.

## I Polynômes à valeurs entières sur $\mathbf{Z}$

Dans toute cette partie,  $n$  désigne un entier naturel.

1. Soit  $p$  un nombre premier. Démontrer que le polynôme

$$\frac{1}{p}(X^p - X)$$

est à valeurs entières sur  $\mathbf{Z}$ .

2. Soit  $k$  un entier naturel.
  - (a) Quelles sont les racines du polynôme  $H_k$  ?
  - (b) Démontrer que le polynôme  $H_k$  appartient à  $\text{Ent}(\mathbf{Z})$ .
3. Démontrer que la famille  $(H_k)_{k \in \{0, \dots, n\}}$  est une  $\mathbf{Q}$ -base de  $\mathbf{Q}_n[X]$ .
4. Soit  $P \in \mathbf{Q}[X]$  de degré  $n$ . Soit  $(b_k)_{k \in \{0, \dots, n\}}$  dans  $\mathbf{Q}^{n+1}$  tel que

$$P(X) = \sum_{k=0}^n b_k H_k(X)$$

(a) Démontrer qu'il existe une matrice  $M$  dans  $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbf{Z})$  telle que

$$\begin{pmatrix} P(0) \\ \vdots \\ P(n) \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

(b) Démontrer qu'il existe une matrice  $N$  dans  $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbf{Z})$  telle que

$$\begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} P(0) \\ \vdots \\ P(n) \end{pmatrix}$$

(c) En déduire que les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i)  $P$  est un polynôme à valeurs entières
- (ii)  $P(\{0, \dots, n\}) \subseteq \mathbf{Z}$ .

5. En déduire que la famille des  $(H_k)_{k \in \mathbf{N}}$  forme une base régulière de  $\text{Ent}(\mathbf{Z})$ .

6. (a) Démontrer que, pour tout  $P$  dans  $\text{Ent}(\mathbf{Z})$  de degré  $n$ ,  $n!P \in \mathbf{Z}[X]$ .

(b) Démontrer que  $n!$  est le plus petit entier naturel non nul  $k$  tel que  $k\text{Ent}_n(\mathbf{Z}) \subset \mathbf{Z}[X]$ .

7. On rappelle qu'il est admis que  $\text{Ent}(\mathbf{Z})$  est un anneau.

(a) Démontrer que  $\text{Ent}(\mathbf{Z})$  est un anneau intègre.

(b) Déterminer  $\text{Ent}(\mathbf{Z})^\times$ .

(c) Démontrer que, pour tout entier non nul  $k$ , le polynôme  $H_k$  est irréductible dans  $\text{Ent}(\mathbf{Z})$ .

8. (a) Soit  $k \in \{0, \dots, n\}$ . Démontrer que

$$L_k^n(X) = (-1)^{n-k} H_k(X) H_{n-k}(X - k - 1).$$

(b) En déduire que, pour  $P$  polynôme de  $\mathbf{Q}[X]$  de degré  $n$ ,  $P$  est un polynôme à valeurs entières si et seulement si  $P$  prend des valeurs entières sur  $n + 1$  entiers consécutifs.

9. Soit  $P$  un polynôme de  $\mathbf{Q}[X]$  de degré  $n$  s'écrivant, par la question 3,

$$P(X) = \sum_{k=0}^n b_k H_k(X),$$

avec  $b_0, \dots, b_n$  dans  $\mathbf{Q}$ .

(a) Démontrer que, pour tout entier naturel non nul  $\ell$ ,

$$\sum_{i=0}^{\ell} (-1)^i \binom{\ell}{i} = 0.$$

(b) En déduire que, pour tout  $k \in \{0, \dots, n\}$ ,

$$b_k = \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \binom{k}{i} P(i).$$

(c) Démontrer que

$$\Delta P(X) = \sum_{k=0}^{n-1} b_{k+1} H_k(X),$$

puis que, pour tout  $k$  dans  $\{0, \dots, n\}$ , on a

$$b_k = \Delta^k(P)(0).$$

10. Pour tout polynôme unitaire  $P \in \mathbf{Z}[X]$ , on introduit

$$d(P) = \text{pgcd}(P(z); z \in \mathbf{Z}).$$

(a) Calculer  $d(X^5 + X)$ .

(b) Démontrer que  $d(P)$  divise  $n!$  pour tout  $P \in \mathbf{Z}[X]$  de degré  $n$ .

(c) Donner un polynôme  $P$  dans  $\mathbf{Z}[X]$ , unitaire et de degré  $n$ , tel que  $d(P) = n!$ .

## II Généralisation des polynômes à valeurs entières sur un anneau $A$

Dans cette partie,  $A$  désigne un anneau infini commutatif, unitaire (c'est-à-dire possédant un élément neutre pour la multiplication), et **principal**. On note  $\mathbf{K}$  le corps de fractions de  $A$ . Soit  $n$  un entier naturel. On introduit

$$I_n = \{0\} \cup \{\alpha \in \mathbf{K} \mid \exists P \in \text{Ent}_n(A), P(X) = \alpha X^n + Q, \deg(Q) \leq n-1\}.$$

1. Soit  $P$  dans  $\text{Ent}(A)$  de degré  $n$ . Soient  $a_0, \dots, a_n \in A$ . Soit

$$d = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i).$$

Démontrer que  $dP \in A[X]$ .

*Indication :* On pourra utiliser l'exercice 2.

2. En déduire qu'il existe  $\alpha_n$  dans  $A \setminus \{0\}$  tel que  $\alpha_n I_n \subseteq A$ .

3. En déduire qu'il existe  $\beta_n$  dans  $\mathbf{K}^\times$  tel que  $I_n = \beta_n A$ .

4. Démontrer qu'il existe une base régulière de  $\text{Ent}(A)$ .

5. On considère l'anneau  $\mathbf{Z}[i]$ .

(a) Propriétés de  $\mathbf{Z}[i]$ .

i. Soit  $N$  l'application qui envoie un élément  $z$  dans  $\mathbf{Z}[i]$  sur  $z\bar{z}$ . Démontrer que  $N$  est à valeurs dans  $\mathbf{N}$ .

ii. Démontrer que

$$\mathbf{Z}[i]^\times = \{z \in \mathbf{Z}[i] \mid N(z) = 1\} = \{1, -1, i, -i\}.$$

iii. Démontrer que  $\mathbf{Z}[i]$  est un anneau euclidien.

(b) Justifier que  $\text{Ent}(\mathbf{Z}[i])$  possède une base régulière.

(c) Soient

$$Q_0(X) = 1, Q_1(X) = X, Q_2(X) = \frac{1}{1+i}(X^2 - X).$$

Démontrer que la famille  $(Q_0, Q_1, Q_2)$  forme une base régulière de  $\text{Ent}_2(\mathbf{Z}[i])$ .

### III Polynômes à valeurs entières sur un sous-ensemble de $\mathbf{Z}$

#### Notations et définitions.

Soit  $p$  un nombre premier.

- Soit  $x \in \mathbf{Q}$ . On définit la *valuation  $p$ -adique* de  $x$ , notée  $v_p(x)$  de la façon suivante :
  - Si  $x$  est non nul,  $v_p(x)$  est l'exposant de  $p$  dans la décomposition en facteurs premiers de  $x$ . En d'autres termes, si  $x = p^\alpha \frac{a}{b}$ , avec  $\alpha \in \mathbf{Z}$ ,  $a, b$  entiers tous deux premiers avec  $p$ , alors  $v_p(x) = \alpha$ .
  - $v_p(0) = +\infty$ .

Ainsi par exemple,  $v_p(p^2) = 2$  et  $v_p(\frac{1}{p}) = -1$ .

- Soit  $E$  un sous-ensemble non vide de  $\mathbf{Z}$ . On appelle *suite  $p$ -ordonnée* de  $E$  toute suite  $\underline{a} = (a_n)_{n \in \mathbf{N}}$  telle que :
  - $a_0 \in E$ ,
  - $a_1 \in E$  et  $a_1$  minimise la valuation  $p$ -adique de  $a_1 - a_0$ , c'est-à-dire

$$v_p(a_1 - a_0) = \min_{x \in E} v_p(x - a_0).$$

- Pour tout entier  $k \geq 2$ ,  $a_k \in E$  et  $a_k$  minimise la valuation  $p$ -adique de  $(a_k - a_{k-1}) \cdots (a_k - a_1)(a_k - a_0)$ , c'est-à-dire

$$v_p\left(\prod_{i=0}^{k-1} (a_k - a_i)\right) = \min_{x \in E} v_p\left(\prod_{i=0}^{k-1} (x - a_i)\right).$$

1. Soit  $\underline{a} = (a_n)_{n \in \mathbf{N}}$  une suite  $p$ -ordonnée de  $E$ . Démontrer que pour un entier naturel  $k$  strictement inférieur au cardinal de  $E$ , on a  $\prod_{i=0}^{k-1} (a_k - a_i) \neq 0$ .

On définit alors pour un entier  $k$  strictement inférieur au cardinal de  $E$ ,

$$V_k(E, \underline{a}, p) = p^{v_p(\prod_{i=0}^{k-1} (a_k - a_i))}.$$

Dans le cas où  $E$  est un ensemble fini et  $k$  un entier supérieur ou égal au cardinal de  $E$ , on pose  $V_k(E, \underline{a}, p) = 0$ .

2. Démontrer que la suite des entiers naturels  $\underline{\mathbf{N}} = (n)_{n \in \mathbf{N}}$ , est une suite  $p$ -ordonnée de  $\mathbf{Z}$ .
3. En déduire que

$$k! = \prod_{p \in \mathcal{P}} V_k(\mathbf{Z}, \underline{\mathbf{N}}, p).$$

On introduit

$$\mathbf{Z}_{(p)} = \left\{ \frac{a}{b} ; a \in \mathbf{Z}, b \in \mathbf{Z} \setminus \{0\} \mid \text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(b, p) = 1 \right\}.$$

On admet que  $\mathbf{Z}_{(p)}$  est un sous-anneau de  $\mathbf{Q}$ .

4. Démontrer que  $\mathbf{Z}_{(p)} = \{x \in \mathbf{Q} \mid v_p(x) \geq 0\}$ . Caractériser de même  $\mathbf{Z}_{(p)}^\times$  en utilisant  $v_p$ .

## 9.2 Épreuve écrite d'analyse et probabilités

SESSION 2021

---

**AGREGATION  
CONCOURS EXTERNE**

**Section : MATHÉMATIQUES**

**COMPOSITION D'ANALYSE ET PROBABILITÉS**

Durée : 6 heures

---

*L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout matériel électronique (y compris la calculatrice) est rigoureusement interdit.*

*Si vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, vous devez le signaler très lisiblement sur votre copie, en proposer la correction et poursuivre l'épreuve en conséquence. De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, vous devez la (ou les) mentionner explicitement.*

**NB : Conformément au principe d'anonymat, votre copie ne doit comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé consiste notamment en la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de la signer ou de l'identifier.**

**Tournez la page S.V.P.**

## INFORMATION AUX CANDIDATS

Vous trouverez ci-après les codes nécessaires vous permettant de compléter les rubriques figurant en en-tête de votre copie.

Ces codes doivent être reportés sur chacune des copies que vous remettrez.

Concours	Section/option	Epreuve	Matière
EAE	1300A	102	2678

Les calculatrices, téléphones, tablettes, ordinateurs, montres connectées et tous appareils électroniques de communication ou de stockage, ainsi que les documents sont interdits.

La qualité de la rédaction est un facteur important d'appréciation des copies. Les candidats sont donc invités à produire des raisonnements clairs, complets et concis.

Les candidats peuvent utiliser les résultats énoncés dans les questions ou parties précédentes, en veillant dans ce cas à préciser la référence du résultat utilisé.

## Notations, vocabulaire et rappels

### Ensembles

- On note  $\mathbf{N}$  l'ensemble des nombres entiers positifs,  $\mathbf{Z}$  l'ensemble des entiers relatifs,  $\mathbf{Q}$  l'ensemble des nombres rationnels,  $\mathbf{R}$  l'ensemble des nombres réels et  $\mathbf{C}$  l'ensemble des nombres complexes, avec les inclusions  $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R} \subset \mathbf{C}$ . Pour tout réel  $r > 0$ , on note

$$r\mathbf{Z} = \{rk; k \in \mathbf{Z}\}.$$

- Un ensemble est *dénombrable* s'il est fini (éventuellement vide) ou en bijection avec  $\mathbf{N}$ . Pour tout ensemble  $E$  fini,  $\#E$  désigne le nombre de ses éléments, avec la convention :  $\#\emptyset = 0$ .
- Pour tout  $x \in \mathbf{R}$ , on note  $[x]$  la *partie entière* de  $x$ , c'est-à-dire  $[x] = \max\{k \in \mathbf{Z} : k \leq x\}$ .
- Pour tout nombre complexe  $z \in \mathbf{C}$ , on note  $\bar{z}$  son conjugué,  $|z|$  son module,  $\operatorname{Re}(z)$  sa partie réelle,  $\operatorname{Im}(z)$  sa partie imaginaire, si bien que  $z = \operatorname{Re}(z) + i \operatorname{Im}(z)$  où  $i$  est tel que  $i^2 = -1$ .
- **Sous-groupes additifs de  $\mathbf{R}$ .** On rappelle que, si  $G$  est un sous-groupe additif non-trivial de  $\mathbf{R}$ , alors on a l'alternative suivante : ou bien il est dense dans  $\mathbf{R}$ , ou bien il existe un réel  $r > 0$  tel que  $G = r\mathbf{Z}$ .

### Fonctions

- Pour toute fonction  $f$  de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathbf{C}$  et pour tout  $a \in \mathbf{R}$ , on note  $f(\cdot + a)$  la fonction  $f$  *translatée de  $a$* , c'est-à-dire la fonction  $t \in \mathbf{R} \mapsto f(t + a) \in \mathbf{C}$ . Si  $a \neq 0$ , on note  $f(a \cdot)$  la fonction  $t \in \mathbf{R} \mapsto f(at) \in \mathbf{C}$ .
- On note  $C_b(\mathbf{R}, \mathbf{C})$  l'ensemble des fonctions  $f$  de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathbf{C}$  qui sont continues et bornées. Pour toute fonction  $f \in C_b(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ , on note  $\|f\|_\infty = \sup_{t \in \mathbf{R}} |f(t)|$ , qui est donc une quantité finie.
- Pour tout  $\lambda \in \mathbf{R}$ , on note  $e_\lambda \in C_b(\mathbf{R}, \mathbf{C})$  la fonction donnée pour tout  $t \in \mathbf{R}$  par

$$e_\lambda(t) = e^{i\lambda t}. \tag{1}$$

- Soit  $I$  un intervalle non-vidé de  $\mathbf{R}$  et  $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$  une suite de fonctions de  $I$  dans  $\mathbf{C}$ . On dit qu'elle *converge uniformément sur  $I$*  vers une fonction  $f$  de  $I$  dans  $\mathbf{C}$  si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{t \in I} |f_n(t) - f(t)| = 0$ .

## Espaces de Banach, topologie

- Soit  $H$  un  $\mathbf{C}$ -espace vectoriel muni d'une norme  $|\cdot|$ . On désigne par  $B(g, \varepsilon)$  la boule ouverte de centre  $g \in H$  et de rayon  $\varepsilon > 0$ , c'est-à-dire  $B(g, \varepsilon) = \{f \in H : |f - g| < \varepsilon\}$ .
- On dit qu'un  $\mathbf{C}$ -espace vectoriel normé  $H$  (pas nécessairement de dimension finie), muni d'une norme  $|\cdot|$ , est un espace de BANACH s'il est complet pour cette norme.
- On rappelle que  $(C_b(\mathbf{R}, \mathbf{C}), |\cdot|_\infty)$  est un espace de BANACH.
- Soit  $(H, |\cdot|)$ , un espace de BANACH. Soit  $A \subset H$ . On note  $\bar{A}$  l'*adhérence de  $A$*  (pour cette norme)
- Soit  $A \subset H$ , non-vidé. On dit que  $A$  satisfait la *propriété de BOLZANO-WEIERSTRASS* si pour toute suite  $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$  d'éléments de  $A$ , il existe  $g \in H$  et une suite extraite  $(f_{\phi(n)})_{n \in \mathbf{N}}$  tels que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |f_{\phi(n)} - g| = 0$ .
- Soit  $A \subset H$ , non-vidé. On dit que  $A$  satisfait la *propriété de BOREL-LEBESGUE* si pour tout réel  $\varepsilon > 0$ , il existe un nombre fini de points  $f_1, \dots, f_n \in A$  tels que  $A \subset \bigcup_{1 \leq k \leq n} B(f_k, \varepsilon)$ .
- On rappelle que dans un espace de BANACH, les propriétés i-iii) suivantes sont équivalentes
  - $A$  satisfait la propriété de BOLZANO-WEIERSTRASS,
  - $A$  satisfait la propriété de BOREL-LEBESGUE,
  - l'ensemble  $\bar{A}$  est compact.

## Formes hermitiennes.

Soient  $H$  un  $\mathbf{C}$ -espace vectoriel et une application  $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \rightarrow \mathbf{C}$ .

- Cette application est une *forme sesquilinéaire* si elle est anti-linéaire à gauche et linéaire à droite, c'est-à-dire que pour tous  $f, g, h \in H$  et pour tout  $c \in \mathbf{C}$ ,  $\langle h, f + cg \rangle = \langle h, f \rangle + c \langle h, g \rangle$  et  $\langle f + cg, h \rangle = \langle f, h \rangle + \bar{c} \langle g, h \rangle$ .
- Une forme sesquilinéaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est dite *hermitienne* si pour tout  $f, g \in H$ ,  $\langle f, g \rangle = \overline{\langle g, f \rangle}$ . Cela implique que  $\langle f, f \rangle \in \mathbf{R}$ .
- Une forme hermitienne  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est dite *positive* si pour tout  $f \in H$ ,  $\langle f, f \rangle \geq 0$ .
- Une forme hermitienne positive  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est dite *définie* si l'égalité  $\langle f, f \rangle = 0$  implique  $f = 0$ . Une forme hermitienne définie positive est aussi appelée *produit scalaire hermitien*. On rappelle que dans ce cas  $f \in H \mapsto \sqrt{\langle f, f \rangle}$  est une norme.
- Soit  $J$  un ensemble non-vidé. Soit  $\{f_j \in H, j \in J\}$  une famille de vecteurs indexés par  $J$ . On munit  $H$  d'une forme hermitienne positive  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  (qui n'est pas nécessairement définie). On dit que la famille  $(f_j)_{j \in J}$  est *orthonormée* si pour tout  $j \in J$ , on a d'une part  $\langle f_j, f_j \rangle = 1$  et d'autre part  $\langle f_j, f_{j'} \rangle = 0$  pour tout  $j' \in J$  distinct de  $j$ .

## Fonctions périodiques, séries de FOURIER

— Pour tout  $r > 0$ , on note  $\mathcal{F}_r$  l'ensemble des fonctions continues, bornées et  $r$ -périodiques :

$$\mathcal{F}_r = \{f \in C_b(\mathbf{R}, \mathbf{C}) : f(\cdot + r) = f\}.$$

— On note  $\text{Vect}_{\mathbf{C}}(\mathbf{e}_{2k\pi}; k \in \mathbf{Z})$  l'espace vectoriel des  $\mathbf{C}$ -combinaisons linéaires finies des fonctions  $\mathbf{e}_{2k\pi}$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ . On rappelle le *théorème de FEJÉR* qui affirme que toute fonction de  $\mathcal{F}_1$  est limite uniforme sur  $\mathbf{R}$  d'une suite à valeurs dans  $\text{Vect}_{\mathbf{C}}(\mathbf{e}_{2k\pi}; k \in \mathbf{Z})$ .

— Pour toute fonction  $f \in \mathcal{F}_1$  et pour tout  $n \in \mathbf{Z}$ , on note  $c_n(f)$  son *coefficient de FOURIER d'ordre  $n$*  qui est donné par

$$c_n(f) = \int_0^1 f(t) e^{-2i\pi n t} dt.$$

On rappelle la *formule de PARSEVAL* :

$$\forall f \in \mathcal{F}_1, \quad \sum_{n \in \mathbf{Z}} |c_n(f)|^2 = \int_0^1 |f(t)|^2 dt \quad (2)$$

la somme sur  $\mathbf{Z}$  étant à comprendre comme  $\sum_{n=0}^{+\infty} |c_n(f)|^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} |c_{-n}(f)|^2$ .

## I. Questions préliminaires.

**(I.0)** Soient  $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$  et  $h_n : x \in \mathbf{R} \mapsto x + 1/n$ . Montrer que la suite  $(h_n)_{n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}}$  converge uniformément sur  $\mathbf{R}$  vers une fonction  $h$  que l'on précisera. Montrer que la suite  $(h_n^2)_{n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}}$  converge simplement sur  $\mathbf{R}$  vers  $h^2$ , mais que la convergence n'est pas uniforme sur  $\mathbf{R}$ .

Soient  $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$  et  $(g_n)_{n \in \mathbf{N}}$  deux suites d'éléments de  $C_b(\mathbf{R}; \mathbf{C})$  qui convergent uniformément sur  $\mathbf{R}$ , vers  $f$  et  $g$  respectivement, montrer que la suite  $(f_n g_n)_{n \in \mathbf{N}}$  converge uniformément vers  $fg$  sur  $\mathbf{R}$ .

**(I.1)** Soit  $\alpha \in \mathbf{C}$  tel que  $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$ .

**(I.1.a)** Pour toute fonction  $f \in C_b(\mathbf{R}, \mathbf{C})$  et pour tout réel  $t \in \mathbf{R}$ , montrer que l'expression notée

$$(K_\alpha f)(t) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha s} f(t+s) ds$$

est bien définie.

**(I.1.b)** On fixe  $f \in C_b(\mathbf{R}, \mathbf{C})$  et  $t \in \mathbf{R}$ . Soit une suite réelle  $(t_n)_{n \in \mathbf{N}}$  telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = t$ . Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (K_\alpha f)(t_n) = (K_\alpha f)(t)$ .

**(I.1.c)** Montrer que l'application  $K_\alpha$  qui à  $f \in C_b(\mathbf{R}, \mathbf{C})$  associe la fonction  $K_\alpha f$  est un endomorphisme continu de  $(C_b(\mathbf{R}, \mathbf{C}), \|\cdot\|_\infty)$ .

**(I.1.d)** Calculer  $\inf \{c \in ]0, +\infty[ : \forall f \in C_b(\mathbf{R}, \mathbf{C}), \|K_\alpha f\|_\infty \leq c \|f\|_\infty\}$ .

**(I.2)** Soit  $\beta \in \mathbf{C}$  et soit  $f \in C_b(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ . Le but de ce groupe de questions est d'étudier les fonctions  $y$  de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathbf{C}$  qui sont de classe  $C^1$  et qui sont solutions de l'équation différentielle

$$(E_{\beta,f}) \quad \forall t \in \mathbf{R}, y'(t) = \beta y(t) + f(t).$$

**(I.2.a)** Montrer que pour tout  $z_0 \in \mathbf{C}$  il existe une unique solution  $y$  de  $(E_{\beta,f})$  telle que  $y(0) = z_0$  et donner une expression explicite de cette solution.

**(I.2.b)** Soit  $y$  une solution de  $(E_{\beta,f})$ . On suppose  $\operatorname{Re}(\beta) > 0$ . Soit  $t_0 \in \mathbf{R}$ . Pour tout réel  $t \geq t_0$ , exprimer  $e^{-\beta t} y(t) - e^{-\beta t_0} y(t_0)$  comme une intégrale. En déduire l'existence de  $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-\beta t} y(t)$ , limite que l'on notera  $\ell$ . Exprimer  $y(t_0)$  en fonction de  $\ell$ ,  $e^{\beta t_0}$  et de la quantité  $(K_\beta f)(t_0)$  introduite au **(I.1)**.

**(I.2.c)** En déduire que pour tout  $\beta \in \mathbf{C}$  tel que  $\operatorname{Re}(\beta) > 0$ , la fonction  $t \mapsto -K_\beta f(t)$  est l'unique solution de classe  $C^1$  bornée sur  $\mathbf{R}$  de l'équation  $(E_{\beta,f})$ .

**(I.2.d)** Soit  $\beta \in \mathbf{C}$  tel que  $\operatorname{Re}(\beta) < 0$ . Justifier que  $(E_{\beta,f})$  a une unique solution dans  $C_b(\mathbf{R}, \mathbf{C})$  que l'on exprimera à l'aide de l'endomorphisme  $K_{-\beta}$ .

**(I.2.e)** Soit  $\lambda \in \mathbf{R}$ . Trouver une fonction  $f \in C_b(\mathbf{R}, \mathbf{C})$  telle que les solutions de  $(E_{i\lambda,f})$  ne soient pas bornées.

**(I.3)** Dans la suite,  $J$  désigne un ensemble non-vide qui est vu comme un ensemble d'indices. Soit  $\{a_j \in [0, +\infty[, j \in J\}$ , une famille de nombres réels positifs indexés par  $J$ . On définit la somme des  $(a_j)_{j \in J}$  comme la quantité (possiblement infinie) suivante :

$$\sum_{j \in J} a_j = \sup \left\{ \sum_{j \in S} a_j ; S \subset J \text{ avec } S \text{ non-vide et fini} \right\}.$$

Dans toutes les questions qui suivent, on suppose que la somme des  $(a_j)_{j \in J}$  est une quantité finie, ce qu'on écrira  $\sum_{j \in J} a_j < \infty$ .

**(I.3.a)** Pour tout  $p \in \mathbf{N}$ , on pose  $D_p = \{j \in J : a_j \geq 2^{-p}\}$ . Montrer que  $D_p$  est fini et que

$$\#D_p \leq 2^p \sum_{j \in J} a_j.$$

**(I.3.b)** Montrer que l'ensemble  $D = \{j \in J : a_j \neq 0\}$  est dénombrable.

**(I.3.c)** On suppose que  $D$  est infini. On se donne une énumération de  $D$ , c'est-à-dire une bijection  $n \in \mathbf{N} \mapsto j(n) \in D$ . Pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , on pose  $s_n = \sum_{k=0}^n a_{j(k)}$ . Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \sum_{j \in J} a_j.$$

**(I.4)** Soit  $(H, |\cdot|)$  un  $\mathbf{C}$ -espace de BANACH. Soit  $H_0$  un sous-espace vectoriel de  $H$  tel que  $\overline{H_0} = H$ . Soit  $\ell : H_0 \rightarrow \mathbf{C}$ , une application  $\mathbf{C}$ -linéaire telle que pour tout  $f \in H_0$ ,  $|\ell(f)| \leq \|f\|$ . Le but de ce groupe de questions est de montrer qu'il existe une unique application  $\mathbf{C}$ -linéaire  $\Lambda : H_0 \rightarrow \mathbf{C}$  satisfaisant la propriété suivante

$$(P) \quad \text{pour tout } f \in H_0, \Lambda(f) = \ell(f) \text{ et pour tout } f \in H, |\Lambda(f)| \leq \|f\|.$$

**(I.4.a)** Montrer que si  $\Lambda_1$  et  $\Lambda_2$  satisfont  $(P)$ , alors  $\Lambda_1 = \Lambda_2$ .

**(I.4.b)** Soit  $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$  une suite d'éléments de  $H_0$  qui est de Cauchy dans  $(H, \|\cdot\|)$ . Montrer que la suite  $(\ell(f_n))_{n \in \mathbf{N}}$  converge.

**(I.4.c)** Soient  $f \in H$  et deux suites  $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$  et  $(g_n)_{n \in \mathbf{N}}$  d'éléments de  $H_0$  telles que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f - f_n\| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|f - g_n\| = 0.$$

Montrer que  $(\ell(f_n))_{n \in \mathbf{N}}$  et  $(\ell(g_n))_{n \in \mathbf{N}}$  convergent vers une même limite, que l'on notera  $\Lambda(f)$ , car elle ne dépend donc que de  $f$  et non des suites ayant  $f$  pour limite.

**(I.4.d)** Montrer que  $\Lambda$  est une application  $\mathbf{C}$ -linéaire. Montrer qu'elle satisfait  $(P)$ .

## II. Polynômes trigonométriques généralisés.

On appelle *polynôme trigonométrique généralisé* toute  $\mathbf{C}$ -combinaison linéaire finie des fonctions  $e_\lambda$ ,  $\lambda \in \mathbf{R}$ , données par (1). On note  $\mathcal{P}$  l'ensemble des polynômes trigonométriques généralisés.

(II.1) Montrer que  $\mathcal{P}$  est un  $\mathbf{C}$ -sous-espace vectoriel de  $C_b(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ . Pour tout  $b \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$  et pour tout  $f \in \mathcal{P}$ , montrer que  $f(\cdot + b) \in \mathcal{P}$  et que  $f(b \cdot) \in \mathcal{P}$ . Montrer également que si  $f, g \in \mathcal{P}$ , alors  $\bar{f}g \in \mathcal{P}$ .

(II.2) Soit un entier  $n \geq 1$ . Soient  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{R}$  distincts. Montrer que la famille  $\{e_{\lambda_1}, \dots, e_{\lambda_n}\}$  est libre. En déduire que les fonctions  $\{e_\lambda, \lambda \in \mathbf{R}\}$  forment une base du  $\mathbf{C}$ -espace vectoriel  $\mathcal{P}$ .

**Notation.** Pour tout  $g \in \mathcal{P}$ , on note  $\mathbf{a}(g, \lambda) \in \mathbf{C}$ ,  $\lambda \in \mathbf{R}$ , les coordonnées de  $g$  dans la base  $(e_\lambda)_{\lambda \in \mathbf{R}}$ . Le nombre  $\mathbf{a}(g, \lambda)$  est appelé *coefficient de FOURIER généralisé de  $g$  d'ordre  $\lambda$* . On introduit également la notation  $\text{Sp}(g) = \{\lambda \in \mathbf{R} : \mathbf{a}(g, \lambda) \neq 0\}$  qui est appelé *spectre de  $g$* . On a donc  $g = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(g)} \mathbf{a}(g, \lambda) e_\lambda$ , ou encore  $g = \sum_{\lambda \in \mathbf{R}} \mathbf{a}(g, \lambda) e_\lambda$ , cette écriture étant unique.

(II.3) Soit  $\lambda_0 \in \mathbf{R}$ .

(II.3.a) Montrer que  $f \in \mathcal{P} \mapsto \mathbf{a}(f, \lambda_0)$  est une application  $\mathbf{C}$ -linéaire.

(II.3.b) Soient  $f \in \mathcal{P}$ ,  $b \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$  et un entier  $k \geq 1$ . Exprimer les coefficients

$$\mathbf{a}(\bar{f}, \lambda_0), \quad \mathbf{a}(f(\cdot + b), \lambda_0), \quad \mathbf{a}(f^{(k)}, \lambda_0), \quad \mathbf{a}(f(b \cdot), \lambda_0)$$

en fonction des coefficients  $(\mathbf{a}(f, \lambda))_{\lambda \in \mathbf{R}}$ .

(II.3.c) Soient  $f, g \in \mathcal{P}$ . Montrer qu'il y a un sens à poser  $\langle f, g \rangle = \mathbf{a}(\bar{f}g, 0)$ . Montrer que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est un produit scalaire hermitien sur  $\mathcal{P}$ .

(II.3.d) Soit  $\lambda \in \mathbf{R}$ . Soit un entier  $n \geq 1$ . Calculer  $\frac{1}{n}(e_\lambda(0) + e_\lambda(1) + \dots + e_\lambda(n-1))$  selon que  $\lambda$  appartient à  $2\pi\mathbf{Z}$  ou pas.

(II.3.e) Soit  $f \in \mathcal{P}$ . Pour tout entier  $n \geq 1$ , on pose  $g_n = \frac{1}{n}(f + f(\cdot + 1) + \dots + f(\cdot + n-1))$ . Montrer que la suite de fonctions  $(g_n)_{n \in \mathbf{N}}$  converge uniformément sur  $\mathbf{R}$  vers une limite  $g$  que l'on précisera en fonction de  $\text{Sp}(f)$  et des  $(\mathbf{a}(f, \lambda))_{\lambda \in \mathbf{R}}$ .

(II.3.f) Montrer que  $f \in \mathcal{P}$  est 1-périodique si et seulement si  $\text{Sp}(f) \subset 2\pi\mathbf{Z}$ . En déduire que pour tout réel  $r > 0$ ,  $f \in \mathcal{P}$  est  $r$ -périodique si et seulement si  $\text{Sp}(f) \subset 2\pi r^{-1}\mathbf{Z}$ .

(II.4) Soit  $r > 0$ . Pour tout  $f \in \mathcal{P}$ , on pose  $Lf = f(\cdot + r) - f$ .

(II.4.a) Montrer que  $L$  est un endomorphisme de  $\mathcal{P}$ .

(II.4.b) Déterminer le noyau de  $L$ .

(II.4.c) Soit  $f \in \mathcal{P}$ . Montrer que le spectre de  $Lf$  ne contient pas d'éléments de  $2\pi r^{-1}\mathbf{Z}$ . Déterminer l'image de  $L$ .