

## CHAPITRE 8. AUTRES MODELES.

Les méthodes décrites dans les chapitres précédents, concernant les parties, autorégressive puis à moyenne ajustée, du modèle ARMA peuvent être considérées comme une formulation standard de la modélisation non-stationnaire. Tout en restant dans le cadre des modèles dont les paramètres s'expriment sur une base de fonctions, il est possible de réaliser des variations autour de la solution standard. Deux d'entre elles constituent la matière de ce chapitre. La première sera une variation sur la nature des bruits dans le modèle. Alors que dans le modèle ARMA usuel, le bruit  $\varepsilon_t$  est une entrée pour le système engendrant le signal  $y_t$ , dans le modèle étudié ici, le bruit est un bruit additif affectant l'observation de la sortie du système, tandis que l'entrée reste nulle dans tout l'intervalle (non nécessairement connexe) où se fait l'identification des paramètres du modèle. Une telle approche "à la Prony" est une extension assez immédiate au cas non-stationnaire de la méthode élaborée par LEROUX, GIANNELLA, 1981.

La seconde variation affecte la structure du modèle ARMA dans la réalisation de la partie autorégressive. Celle-ci est normalement obtenue par un filtre transverse, mais on peut la réaliser au moyen d'un filtre en treillis. Dans le cas stationnaire, le passage d'une forme à l'autre se fait par une simple transformation non-linéaire, mais bijective entre les deux jeux de paramètres possibles, prédicteurs  $a_i$  ou coefficients de réflexion  $k_i$ . Quand ces paramètres varient avec le temps, ce passage s'accompagne d'une altération de la base de fonctions, ce qui détruit l'équivalence entre les deux formes du modèle. On verra qu'un algorithme inspiré de celui dû à BURG, 1968, pour le modèle stationnaire, permet d'identifier de façon

spécifique les coefficients de corrélation partielle, lorsqu'ils dépendent du temps.

## 1. Modèle ARMA déterministe.

### 1.1. méthode de Prony-Pisarenko stationnaire.

La première des méthodes étudiées ici s'insère dans une série dont le dénominateur commun est de représenter le signal comme une somme de sinusoides amorties ou comme somme d'exponentielles complexes. Le premier terme de la série remonte au travail de PRONY, 1795, qui calcule la fonction interpolant  $2n+1$  mesures comme somme de  $n$  exponentielles, ce qui donne le modèle suivant:

$$(2-171) \quad y_t = \sum_{i=1}^n \mu_i \rho_i^t + \mu_0$$

PRONY, 1795, montre que les mesures vérifient alors une équation de récurrence telle que:

$$(2-172) \quad (y_t - \mu_0) + \sum_{i=1}^n a_i (y_{t-i} - \mu_0) = 0$$

En écrivant cette relation pour  $t=n \dots 2n$ , et en retranchant ces équations l'une à l'autre, on obtient un système d'équations dont la solution fournit les  $a_i$ . Les  $\rho_i$  sont alors racines du polynôme  $A(\rho) = 1 + a_1 \rho + \dots + a_n \rho^n$ . Les poids  $\mu_i$  s'obtiennent par le système linéaire constitué de  $n+1$  équations telles que (2-171).

La même démarche a été adoptée par PISARENKO, 1973, pour l'estimation de la fréquence et l'amplitude de  $p$  sinusoides dans un bruit additif. Un théorème de Kolmogorov permet de mettre l'autocorrélation de tels signaux sous une forme analogue à (2-171) avec  $\rho_i = e^{j\omega_i}$ , les  $\omega_i$  étant les pulsations

de chaque sinusoïde,  $\sigma^2$  la variance du bruit:

$$(2-173) \quad R_k = \sigma^2 \delta_k + \sum_{i=1}^p \mu_i \rho_i^k$$

L'emploi de cette équation pour  $k \in [-p, +p]$  permet de calculer les paramètres  $a_i$  de la récurrence analogue à (2-172), sous la forme d'un vecteur propre de la matrice d'autocorrélation du signal:

$$(2-174) \quad \begin{bmatrix} R_0 & & & R_p \\ & R_p & & \\ & & \ddots & \\ R_p & & & R_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ \cdot \\ a_p \end{bmatrix} = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ \cdot \\ a_p \end{bmatrix}$$

Le choix parmi tous les vecteurs propres de la matrice R de corrélation se fait en considérant  $\sigma^2$  qui est une valeur propre de R: comme la matrice  $R - \sigma^2 I$  doit être non-négative,  $\sigma^2$  ne peut être que la plus petite des valeurs propres (toutes positives) de R.

La même équation est obtenue par GUEGUEN, 1975, au terme d'un cheminement différent dont le point de départ est la recherche d'un modèle AR avec un vecteur de paramètres à norme constante, et minimisant la variance du bruit résiduel. Ceci revient à maximiser le rapport des énergies du signal et du bruit, ce qui conduit à une prédiction linéaire factorielle, puis quand le bruit n'est plus blanc à une prédiction linéaire discriminante. La structure de Toeplitz de la matrice R peut être prise en compte pour le calcul de la valeur propre la plus petite et du vecteur qui lui est associé, par un emploi répété de l'algorithme de Levinson (GUEGUEN, GRENIER, GIANNELLA, 1980).

On pourrait s'attendre à ce que le nom de "méthode de Prony" soit

attaché à l'extension de la méthode précédente au cadre de l'estimation d'une somme de sinusoides amorties, dans du bruit, extension qui doit aboutir à une équation aux valeurs propres d'une matrice de covariance du signal (au sens où on oppose corrélation et covariance pour le modèle AR). Si une telle méthode a récemment été mise au point par LE ROUX, GIANNELLA, 1981, ce n'est pourtant pas une telle approche qui à la suite de MARPLE, 1979, reprenant un travail de Hildebrandt, a été considérée comme la généralisation du travail de PRONY, 1795, quand les mesures sont bruitées. Au contraire, la résolution, une fois admise l'existence de la récurrence de type autorégressive sur le signal, se fait par un critère de moindres carrés de l'erreur de prédiction. Il ne s'agit plus que d'une variante du modèle AR dans son estimation, et non dans son principe.

Le modèle introduit par LEROUX, GIANNELLA, 1981, diffère fondamentalement du modèle AR car il considère que l'entrée est nulle sur l'intervalle d'observation, et que la sortie est entachée d'un bruit additif blanc  $v_t$ , de variance  $\sigma^2$  (fig.2.1).

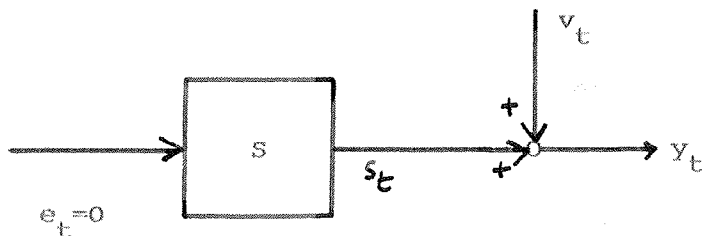


Figure 2.1: modèle type "Prony".

Le signal  $y_t$  est observé sur un intervalle  $[0, T]$ , et s'il n'est pas nul ou si  $s_t$  n'est pas nul c'est du fait d'entrées non nulles antérieures à  $t=0$ . L'identification inclut donc la recherche des paramètres  $a_i$  (dénominateur de

$s_t$ ), de  $\sigma^2$  et des conditions initiales de  $S$ . C'est ce type de modèle qui va être décrit dans le cadre non-stationnaire adopté ici.

## 1.2. Modèles non-stationnaires déterministes.

Le signal  $s_t$ , sortie du système  $S$  vérifie une équation de récurrence de type ARMA:

$$(2-175) \quad s_t + a_1(t-1)s_{t-1} + \dots + a_p(t-p)s_{t-p} = b_0(t)e_t + \dots + b_q(t-q)e_{t-q}$$

On pourra alors supposer que l'entrée  $e_t$ , nulle sur un intervalle de mesure, qui n'est pas nécessairement connexe, est constituée d'une impulsion située juste avant chaque composante connexe de l'intervalle de mesure. Un tel modèle est conçu en vue d'une modélisation des sons voisés de la parole créés par passage dans le conduit vocal d'une onde glottique faisant alterner fermeture ( $e_t=0$ ) et ouverture de la glotte. On obtiendrait aussi le même modèle en posant que la partie MA du modèle est réduite à  $b_0(t)=1$ ,  $b_i(t)=0$ , mais que l'entrée est non-nulle sur  $q+1 < p$  derniers points avant chaque partie connexe de l'intervalle de mesure. A l'intérieur de l'intervalle de mesure, le signal  $s_t$  est déterministe (au sens de Wold), ou encore parfaitement prédictible:

$$(2-176) \quad s_t + a_1(t-1)s_{t-1} + \dots + a_p(t-p)s_{t-p} = 0$$

### 1.2.1. Estimation de la partie AR.

En introduisant  $S_t$  vecteur des projections de  $s_t$  sur la base des fonctions  $f_i(t)$ , on peut écrire (2-176) matriciellement:

$$(2-177) \quad [s_t \quad s_{t-1}^T \quad \dots \quad s_{t-p}^T] \begin{bmatrix} 1 \\ \theta \end{bmatrix} = 0$$

$$\text{avec } \theta = [a_{10} \dots a_{1m} \quad a_{20} \dots a_{pm}]^T$$

On peut de (2-177) tirer un estimateur de  $\theta$  sous forme d'une condition nécessaire sur  $\theta$ , en écrivant tout d'abord:

$$(2-178) \quad \sum_{t \in \Gamma} \begin{bmatrix} s_t \\ s_{t-1} \\ \cdot \\ \cdot \\ s_{t-p} \end{bmatrix} [s_t \quad s_{t-1}^T \dots s_{t-p}^T] \begin{bmatrix} 1 \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}$$

Puis en utilisant  $y_t = s_t + v_t$  et  $Y_t = S_t + V_t$ , où  $Y_t$  et  $V_t$  désignent les produits par la base de  $y_t$  et  $v_t$ , on écrira (2-178) en prenant l'espérance mathématique, et en se servant du fait que  $s_t$  est certain, et  $v_t$  centré, ce qui annule les produits  $s_t v_t$ .

$$(2-179) \quad E \left( \sum_{t \in \Gamma} \begin{bmatrix} y_t \\ y_{t-1} \\ \cdot \\ \cdot \\ y_{t-p} \end{bmatrix} [y_t \quad y_{t-1}^T \dots y_{t-p}^T] \right) \begin{bmatrix} 1 \\ \theta \end{bmatrix} = E \left( \sum_{t \in \Gamma} \begin{bmatrix} v_t \\ v_{t-1} \\ \cdot \\ \cdot \\ v_{t-p} \end{bmatrix} [v_t \quad v_{t-1}^T \dots v_{t-p}^T] \right) \begin{bmatrix} 1 \\ \theta \end{bmatrix}$$

On notera  $F_i$  la matrice:

$$(2-180) \quad F_i = \sum_{t \in \Gamma} \begin{bmatrix} f_0(t-i) \\ \cdot \\ \cdot \\ f_m(t-i) \end{bmatrix} [f_0(t-i) \dots f_m(t-i)]$$

Le fait que  $v_t$  soit blanc, donne enfin l'estimateur de  $\theta$  sous la forme d'une équation aux vecteurs propres généralisés:

$$(2-181) \quad \sum_{t \in \Gamma} \begin{bmatrix} Y_t \\ Y_{t-1} \\ \vdots \\ Y_{t-p} \end{bmatrix} [Y_t \ Y_{t-1}^T \ \dots \ Y_{t-p}^T] \begin{bmatrix} 1 \\ \theta \end{bmatrix} = \sigma^2 \begin{bmatrix} N & & \\ & F_1 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & F_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \theta \end{bmatrix}$$

où  $N$  désigne le cardinal de l'intervalle  $\Gamma$ . Les deux matrices figurant dans (2-181) sont positives, et sont des covariances. Leur différence étant aussi une covariance, celle du vecteur des sorties  $s_t$ , doit être non-négative, ce qui impose à  $\sigma^2$  d'être la plus petite valeur propre du problème (2-181), toutes étant positives.

L'équation (2-181) fournit donc un estimateur pour la partie AR du modèle de Prony non-stationnaire. Cette équation est semblable à celle donnée par LE ROUX, GIANNELLA, 1981, dans le cas stationnaire et que l'on retrouve en prenant  $Y_t = y_t$  et  $F_i = N$ . On réduit ainsi (2-181) à une équation aux vecteurs propres simples. Est-il possible de résoudre le problème généralisé (2-181) par un algorithme rapide du type de celui donné par GUEGUEN, GRENIER, GIANNELLA, 1980 ? La réponse est positive. Il s'agit de combiner alternativement le calcul de coefficient de Rayleigh pour estimer  $\sigma^2$ , connaissant  $\theta$ , et la version donnée au chapitre VI de l'algorithme de "covariance" sur un signal vectoriel, pour estimer  $\theta$ , connaissant  $\sigma^2$  mais ceci n'est efficace que si la matrice figurant à gauche dans (2-181) est un produit de deux matrices de Toeplitz, ce qui est effectif si et seulement si l'intervalle  $\Gamma$  de mesure est connexe. Dans le cas contraire un algorithme rapide existe toujours, mais sa complexité est proportionnelle au nombre de parties connexes constituant  $\Gamma$ , ce qui la rend vite supérieure à celle de l'algorithme non rapide.

### 1.2.2. Estimation de la partie MA.

L'estimation de la partie MA du modèle, ou encore de l'entrée  $s_t$  se fera de manière semblable à ce que proposent LE ROUX, GIANNELLA, 1981. De la partie AR, on déduira la réponse impulsionnelle  $h_{t,s}$  du système S. On cherchera par exemple les entrées  $e_{-p}, \dots, e_{-1}$  qui engendrent  $s_t$ :

$$(2-182) \quad s_t = \sum_{i=1}^p h_{t,-i} e_{-i}$$

Le nombre des entrées est limité à  $p$ , car le modèle AR( $p$ ) admet une réalisation sous forme de variables d'état, de dimension  $p$ , ce qui fixe le nombre de degrés de liberté possibles pour la réponse du système S. Le calcul des entrées  $e_{-i}$  peut se faire par minimisation de l'erreur quadratique moyenne entre  $s_t$  et  $y_t$ , ce qui conduit à l'équation:

$$(2-183) \quad \begin{bmatrix} e_{-1} \\ \vdots \\ e_{-p} \end{bmatrix} = (H^T H)^{-1} H^T \begin{bmatrix} y_T \\ \vdots \\ y_0 \end{bmatrix}$$

avec  $H = \begin{bmatrix} h_{T,-1} & \dots & h_{T,-p} \\ \dots & \dots & \dots \\ h_{0,-1} & \dots & h_{0,-p} \end{bmatrix}$

Cette équation suppose que l'intervalle de temps  $\Gamma$  soit connexe:  $\Gamma = [0, T]$ . Lorsque ce n'est plus le cas, on pourra décomposer  $\Gamma$  en une réunion d'intervalles connexes, et identifier les entrées précédant chaque intervalle au moyen d'une version de l'équation (2-183) limitée à l'intervalle étudié, mais dans laquelle on remplacera  $y_t$  par  $y_t - s_t^*$  où  $s_t^*$  est le signal reconstruit à partir des entrées estimées avant les intervalles qui ont précédé celui en cours d'étude.

La matrice est de Toeplitz dans le cas stationnaire, ce qui simplifie



le calcul de (2-183). Dans le cas étudié ici, où aucune structure simplifi-  
catrice n'apparaît, une organisation efficace du calcul peut s'obtenir en  
écrivant le modèle sous forme d'état:

$$(2-184) \quad x_t = \begin{bmatrix} -a_1(t-1) & 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ -a_p(t-p) \end{bmatrix} x_{t-1} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$y_t = [1 \ 0 \ \dots \ 0] x_t + v_t$$

Dans un intervalle donné, on calculera l'état  $x_t^{(0)}$  induit par les  
entrées des intervalles précédents, et les états  $x_t^{(i)}$  induits par l'entrée  
de valeur 1 au i-ème instant précédant l'intervalle. L'erreur, assimilée au  
bruit d'observation est représentée par:

$$(2-185) \quad v_t = y_t - [1 \ 0 \ \dots \ 0] (x_t^{(0)} + \sum_{i=1}^p x_t^{(i)} e_{-i})$$

Cette équation permet de calculer la matrice figurant dans (2-183) en  
procédant récursivement sur t, de 0 à T. Parvenu à l'instant final T, on en  
déduira les  $e_{-i}$ , puis un nouvel état:

$$(2-186) \quad x_T = x_T^{(0)} + \sum_{i=1}^p x_T^{(i)} e_{-i}$$

Cet état est celui qui deviendra  $x_t^{(0)}$  dans l'intervalle suivant. Une  
telle organisation du calcul semble la plus économe possible, car  
l'introduction de (p+1) vecteurs d'état de dimension p lui permet à la fois  
d'éviter la mise en mémoire de la matrice H, pour le calcul de la sortie  $s_t$   
une fois connus les  $e_{-i}$ , et d'éviter le surcoût que serait le recalcul des  
 $h_{t,s}$  après la détermination des  $e_{-i}$  pour trouver  $s_t$ . Il ne faudrait pas  
conclure cependant ces paragraphes consacrés au calcul de l'entrée sans

souligner que comme dans le cas stationnaire (LE ROUX, GIANNELLA, 1981), ce calcul a une faiblesse: il extrait un bruit  $v_t$  dont la covariance n'est pas la matrice identité,  $v_t$  est coloré, ce qui contredit l'hypothèse initialement faite sur  $v_t$ . Il s'agit là d'une difficulté probablement inhérente à l'emploi des moindres carrés, mais comment la contourner? La réponse demeure inconnue.

## 2. Filtre en treillis.

La seconde méthode considérée dans ce chapitre a son origine dans le modèle autorégressif plus classique avec son entrée en bruit blanc. La variante porte sur la forme de la réalisation du modèle, entraînant un remplacement du filtre transverse de coefficients  $a_i$ , par un filtre en treillis dont les coefficients sont les  $k_i$ , corrélations partielles. Le filtre en treillis, introduit à partir du modèle AR stationnaire par ITAKURA, SAITO, 1971, se présente sous deux formes, d'une part un filtre "blanchissant" qui calcule le résidu  $\epsilon_t$  du modèle AR à partir du signal  $y_t$ , et le filtre inverse, effectuant la synthèse de  $y_t$ . C'est le premier type qui intervient ici, le seul pour lequel se pose la question de l'identification dans le cadre AR.

### 2.1. Structure du filtre.

Le filtre en treillis est très directement lié à l'algorithme de Levinson. Aux modèles AR(p) direct et rétrograde (forward, backward) sont associés respectivement les deux résidus  $\epsilon_p^+(t)$  et  $\epsilon_p^-(t)$  tels que:

$$(2-187) \quad \begin{bmatrix} \epsilon_p^+ \\ \epsilon_p^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a_1 & \dots & a_p \\ a_p & \dots & a_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_t \\ \cdot \\ \cdot \\ y_{t-p} \end{bmatrix}$$

L'obtention du modèle d'ordre  $p$  à partir de  $p-1$  se faisant par combinaison au moyen des coefficients  $k_p^+ = k_p^-$ , on retrouve la même relation sur les résidus:

$$(2-188) \quad \begin{bmatrix} \epsilon_p^+(t) \\ \epsilon_p^-(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & k_p^+ \\ k_p^- & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{p-1}^+(t) \\ \epsilon_{p-1}^-(t-1) \end{bmatrix}$$

avec 
$$k_p^+ = \frac{E(\epsilon_{p-1}^+(t)\epsilon_{p-1}^-(t-1))}{E((\epsilon_{p-1}^+(t))^2)}$$

et 
$$k_p^- = \frac{E(\epsilon_{p-1}^+(t)\epsilon_{p-1}^-(t-1))}{E((\epsilon_{p-1}^-(t))^2)}$$

Ce qui est intéressant dans l'équation (2-188) est qu'elle transcrit une structure de filtre constituée d'une cascade de  $p$  cellules, ayant en entrée les résidus d'ordre  $i-1$ , et en sortie, ceux d'ordre  $i$  (Fig. 2-2). Chaque cellule se compose d'un retard pur, deux additionneurs et deux multiplieurs (Fig. 2-3).

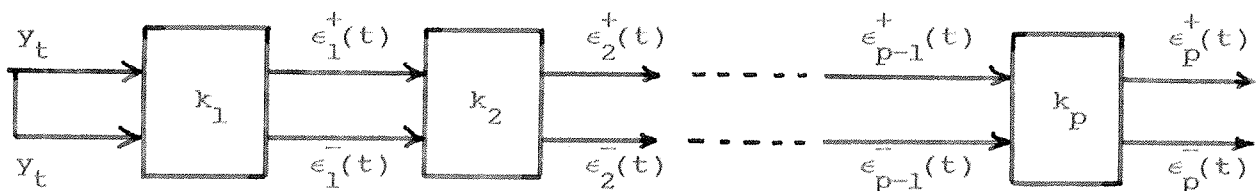


Figure 2-2. Structure du filtre en treillis.

Dans un contexte non-stationnaire, les relations (2-187) et (2-188) restent inchangées mais les  $a_i$  et les  $k_i$  deviennent des fonctions du temps  $t$ , et de plus les  $a_i$  se scindent en  $a_i^+$  et  $a_i^-$ . On constate cependant qu'il n'est pas souhaitable de reprendre directement (2-188) ou la figure 2-3 qui

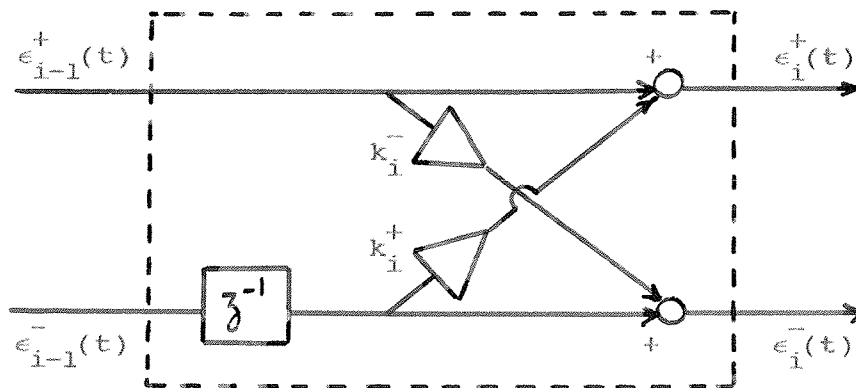


Figure 2-3. Structure d'une cellule du treillis.

l'interprète en se contentant d'y remplacer  $k_i^+$  par  $k_i^+(t)$ , et  $k_i^-$  par  $k_i^-(t)$ , car on aurait alors un produit  $k_i^+(t)\epsilon_{i-1}^-(t-1)$ . Il est préférable d'éviter ces mélanges entre instants, et on posera, ce qui est arbitraire et ne change rien à la généralité du modèle, une relation entrée-sortie pour chaque cellule telle que (2-189). Les équations de l'estimateur en seront simplifiées.

$$(2-189) \begin{bmatrix} \epsilon_i^+(t) \\ \epsilon_i^-(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & k_i^+(t-1) \\ k_i^-(t) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{i-1}^+(t) \\ \epsilon_{i-1}^-(t-1) \end{bmatrix}$$

Pour interpréter cette nouvelle équation sous forme d'une cellule du filtre en treillis, il devient nécessaire d'introduire un second retard, en déplaçant le premier (Fig. 2-4).

Il existe plusieurs variantes de ce filtre en treillis dans le cas stationnaire (ITAKURA, SAITO, 1971), en particulier celles construites avec un seul multiplieur au lieu de deux, mais une telle structure perd sa validité dans le cas non-stationnaire où les coefficients de réflexion, direct et

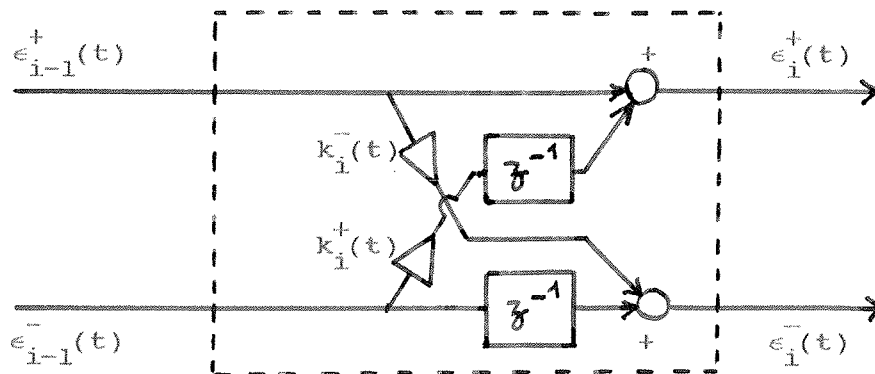


Figure 2-4. Structure d'une cellule à 2 retards.

rétrograde, différent.

L'identification du modèle (2-189) sera bien entendu calquée sur les méthodes existant dans le cas stationnaire. Elles sont essentiellement deux: la méthode due à BURG, 1968, qui fonctionne dans le domaine temporel, et celle due à MAKHOUL, 1977, qui reproduit les mêmes étapes que celle de BURG, 1968, mais en travaillant uniquement sur l'autocorrélation du signal, ce qui réduit le coût du calcul. Pour des signaux non-stationnaires, cette seconde méthode n'est pas applicable étant donnée l'impossibilité d'estimer une covariance par une somme temporelle. On retiendra donc la première méthode en postulant que chaque coefficient de réflexion s'exprime sur la base de fonctions:

$$(2-190) \quad k_i^+(t) = \sum_{j=0}^m k_{ij}^+ f_j(t) \quad \text{et} \quad k_i^-(t) = \sum_{j=0}^m k_{ij}^- f_j(t)$$

Comme dans la méthode de BURG, 1968, on cherchera à optimiser les cellules l'une après l'autre en initialisant avec  $\epsilon_0^+(t) = \epsilon_0^-(t) = y_t$ . Le calcul de la  $i$ -ème cellule se fait en minimisant l'énergie des sorties qui sont des erreurs

de prédiction. Si les données  $y_t$  sont mesurées sur l'intervalle  $[0, T]$ , le critère  $J$  est:

$$(2-191) \quad J = \sum_{t=i}^T ((\epsilon_i^+(t))^2 + \epsilon_i^-(t))^2$$

Introduisant les vecteurs  $K_i^+$  et  $K_i^-$  des paramètres  $k_{ij}^+$  et  $k_{ij}^-$ , et les projections  $H_i^+$  et  $H_i^-$  des résidus  $\epsilon_i^+(t)$  et  $\epsilon_i^-(t)$ , sur la base des fonctions  $f_i(t)$ , il est possible de réécrire  $J$ :

$$(2-192) \quad J = \sum_{t=i}^T (\epsilon_{i-1}^+(t) + (K_i^+)^T H_{i-1}^-(t-1))^2 + \sum_{t=i}^T (\epsilon_{i-1}^-(t-1) + (K_i^-)^T H_{i-1}^+(t))^2$$

$$\text{avec} \quad K_i^+ = \begin{bmatrix} k_{i0}^+ \\ . \\ k_{im}^+ \end{bmatrix} \quad K_i^- = \begin{bmatrix} k_{i0}^- \\ . \\ k_{im}^- \end{bmatrix} \quad H_i^+(t) = \begin{bmatrix} f_0(t)\epsilon_i^+(t) \\ . \\ f_m(t)\epsilon_i^+(t) \end{bmatrix} \quad H_i^-(t) = \begin{bmatrix} f_0(t)\epsilon_i^-(t) \\ . \\ f_m(t)\epsilon_i^-(t) \end{bmatrix}$$

La minimisation de  $J$  relativement aux paramètres  $k_{ij}^+$  et  $k_{ij}^-$  aboutit à deux systèmes d'équations distincts:

$$(2-193) \quad \Phi_i^+ \cdot K_i^+ = -\Psi_i^+$$

$$(2-194) \quad \Phi_i^- \cdot K_i^- = -\Psi_i^-$$

$$\text{avec} \quad \Phi_i^+ = \sum_{t=i}^T H_{i-1}^-(t-1) (H_{i-1}^-(t-1))^T$$

$$\Psi_i^+ = \sum_{t=i}^T H_{i-1}^-(t-1) \epsilon_{i-1}^+(t)$$

$$\Phi_i^- = \sum_{t=i}^T H_{i-1}^+(t) (H_{i-1}^+(t))^T$$

$$\Psi_i^- = \sum_{t=i}^T H_{i-1}^+(t) \epsilon_{i-1}^-(t)$$

Il est clair que les vecteurs  $K_i^+$  et  $K_i^-$  généralisent les coefficients de corrélation partielle, car les équations (2-193) et (2-194) les présentent comme des "rapports" entre les intercorrélations  $\Psi$  et les autocorrélations

Φ. Si on impose  $K_i^+ = K_i^- = K_i$ , les équations se confondent en une seule:

$$(2-195) \quad (\phi_i^+ + \phi_i^-) K_i = -(\psi_i^+ + \psi_i^-)$$

Cette dernière équation est encore plus proche de celle de BURG, 1968. Dans la pratique, l'égalité  $K_i^+ = K_i^-$ , qui s'oppose au fait que les  $k_i$  soient non-stationnaires, n'a pas lieu d'être retenue, sauf peut-être comme une approximation à réserver aux signaux lentement variables.

## 2.2. Liens avec le modèle autorégressif.

Quelles différences y-a-t-il entre le modèle non-stationnaire identifié par la procédure qui vient d'être décrite, et le modèle autorégressif non-stationnaire ? Il y en a deux. La première, présente aussi dans le cas stationnaire vient de ce que l'erreur de prédiction est minimisée de manière locale dans chaque cellule du filtre en treillis alors qu'elle l'est de manière globale dans le modèle AR. La seconde différence est spécifique des modèles non-stationnaires évolutifs (définis sur une base de fonctions). Pour la mettre en évidence, déterminons le filtre transverse ou le modèle AR équivalent à un filtre en treillis de paramètres  $k_{ij}^+$ ,  $k_{ij}^-$ . Les prédicteurs  $a_j^i(t)$  et  $\alpha_j^i(t)$  respectivement direct et rétrogrades à l'ordre  $i$  ( $j=1\dots i$ ) doivent être tels que:

$$(2-196) \quad \begin{bmatrix} \epsilon_i^+(t) \\ \epsilon_i^-(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a_1^i(t-1) & \dots & a_i^i(t-i) \\ \alpha_1^i(t) & \dots & \alpha_{i-1}^i(t-i+1) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_t \\ Y_{t-1} \\ \cdot \\ Y_{t-i} \end{bmatrix}$$

La confrontation de (2-196) avec (2-189) permet d'élaborer une relation de récurrence entre les prédicteurs d'ordre  $i$  et ceux d'ordre  $i-1$ :

$$\begin{aligned}
(2-197) \quad a_j^i(t-j) &= a_j^{i-1}(t-j) + k_i^+(t-1) \alpha_{i-j}^{i-1}(t-j) \quad \text{pour } j \in [1, i-1] \\
a_1^i(t-1) &= k_1^+(t-1) \\
\alpha_{i-j}^i(t-j) &= \alpha_{i-j}^{i-1}(t-j) + k_i^-(t) a_j^{i-1}(t-j) \quad \text{pour } j \in [1, i-1] \\
\alpha_1^i(t) &= k_1^-(t)
\end{aligned}$$

Il faut noter que ces formules se réduisent dans le cas stationnaire à l'algorithme de LEVINSON, 1946. Par contre quand les  $k_i$  sont variables, exprimés sur une base de fonctions  $(f_0(t) \dots f_m(t))$ , il apparaît clairement que les  $a_i$  et  $\alpha_i$  reconstruits à partir d'eux par (2-197) ne s'expriment plus sur la même base. Par exemple, si les  $k_i(t)$  sont tous des polynômes de degré  $m$  en  $t$ , les prédicteurs, dans le modèle d'ordre  $i$  seront des polynômes dont le degré pourra monter jusque  $i \cdot m$ . C'est là que se situe la seconde différence entre modèle autorégressif et filtre en treillis non-stationnaires. Son importance est surtout pratique car suivant les signaux à traiter c'est tantôt l'un, tantôt l'autre des deux modèles qui sera le mieux exprimé sur une base de fonctions donnée. La question de savoir lequel de ces deux jeux de paramètres (ou d'un troisième) est le plus général ou a le champ d'application le plus vaste, reste ouverte ...