Contrôle des connaissances — Corrigé

Dans tout ce qui suit, A désigne l'alphabet $A = \{a, b\}$, $\mathbb{N}$, l'ensemble des entiers (positifs ou nul). Pour w dans A^*, on note $|w|_a$ le nombre de a dans w.

1 .— *Relations d'image finie.*

*Rappel : une relation α est dite d'*image finie *si $\mathsf{Im}\,\alpha$ est un ensemble fini (et non pas si l'image $\alpha\,(w)$ est finie pour chaque w).*

Montrer qu'une relation rationnelle fonctionnelle d'image finie est séquentielle.

Si la relation $\alpha\colon A^* \to A^*$ est d'image finie, posons $\mathsf{Im}\,\alpha = \{w_1, w_2, \ldots, w_k\}$ et notons $\mathbf{k} = \{1, 2, \ldots, k\}$. Si α est une relation rationnelle, α^{-1} l'est aussi et $\alpha^{-1}\,(w_j) = K_j$ est un rationnel de $\mathbb{K}_j$ pour chaque j. Les $\mathbb{K}_j$ sont disjoints deux à deux puisque α est fonctionnelle. Chaque $\mathbb{K}_j$ est accepté par un automate *déterministe complet* $\mathcal{A}_j = \langle\, Q_j, i_j, \delta_j, T_j \,\rangle$.
À partir du produit des $\mathcal{A}_j$ on construit un automate *déterministe* qui reconnaît tous les K_j simultanément :

$$\mathcal{A} = \langle\, Q, i, \delta, U_1, U_2, \ldots, U_k \,\rangle\,, \qquad \text{avec :}$$
$$Q = \prod_{j\in\mathbf{k}} Q_j\,, \quad i = (i_1, i_2, \ldots, i_k)\,, \qquad \text{et} \quad U_j = \prod_{h\in\mathbf{k}, h\neq j} Q_h \times T_j \quad .$$

Pour tout u dans A^*, on a : $\delta\,(i, u) \in U_j \Leftrightarrow u \in K_j$.
On transforme $\mathcal{A}$ en un transducteur $\mathcal{T}$ en ajoutant la sortie 1_{A^*} sur chaque transition de $\mathcal{A}$ et en définissant la fonction finale U par : $U(q) = w_j$ si et seulement si $q \in U_j$; $\mathcal{T}$ est séquentiel puisque $\mathcal{A}$ est déterministe et que $U\colon Q \to A^*$ est fonctionnelle.

2 .— *Image commutative.*

Soit $\alpha\colon A^* \to \mathbb{N}^2$ l'application image commutative, *c'est-à-dire $\alpha\,(w) = (|w|_a, |w|_b)$.*
Montrer que l'équivalence d'application de α, c'est-à-dire la relation $\alpha^{-1}\circ\alpha\colon A^* \to A^*$ qui à chaque mot w de A^* fait correspondre tous les mots de A^* qui ont le même nombre de a et le même nombre de b que w, n'est pas une relation rationnelle.

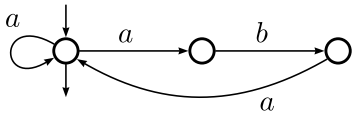
Soit $L = (a\,b)^*$, langage rationnel. On a :

$$[\alpha^{-1}\circ\alpha](L) = \{w \in A^* \mid |w|_a = |w|_b\} \quad ,$$

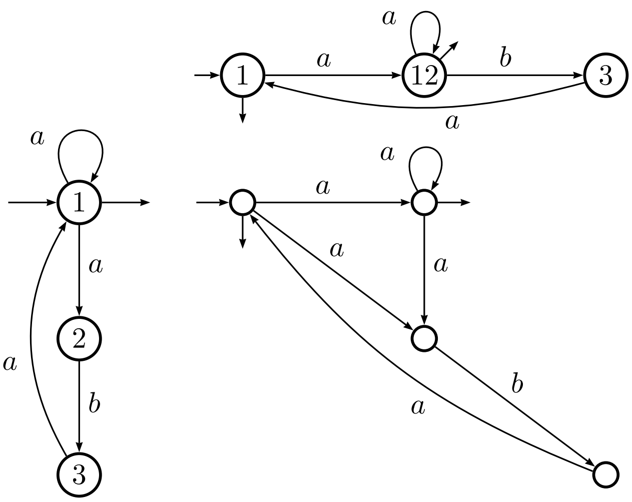
qui n'est pas un langage rationnel, donc $\alpha^{-1}\circ\alpha$ n'est pas une relation rationnelle.

3 .— ***Codage et décodage.***

(i) *Construire le revêtement de Schützenberger de l'automate ci-dessous.*

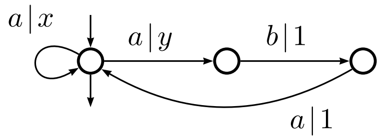


L'automate $\mathcal{A}_1$ (verticalement), son déterminisé $\widehat{\mathcal{A}_1}$ (horizontalement, en haut) et son revêtement de Schützenberger $\mathcal{S}_1$.



(ii) *Soit* $\alpha\colon \{x,y\}^* \to \{a,b\}^*$ *le morphisme défini par :* $\alpha(x) = a$ *et* $\alpha(y) = a\,b\,a$. *Montrer que* α *est* injectif *(donc la relation* α^{-1} *est fonctionnelle).*

L'automate $\mathcal{A}_1$ est l'automate d'entrée sous-jacent du transducteur $\mathcal{T}_1$ ci-dessous qui réalise α^{-1}.



Le morphisme α est injectif, et donc α^{-1} est fonctionnelle, si et seulement si l'automate $\mathcal{A}_1$ est non ambigu.

On observe sur la figure de la question précédente que la projection de $\mathcal{S}_1$ sur $\widehat{\mathcal{A}_1}$ est In-bijective, c'est-à-dire un co-revêtement. Il y a donc bijection entre les calculs réussis de $\widehat{\mathcal{A}_1}$ et ceux de $\mathcal{S}_1$, et aussi de $\mathcal{A}_1$ puisque $\mathcal{S}_1$ en est un revêtement : $\mathcal{A}_1$ est non ambigu comme $\widehat{\mathcal{A}_1}$.

(iii) *Donner une transducteur (fini) séquentiel qui réalise* α^{-1}.

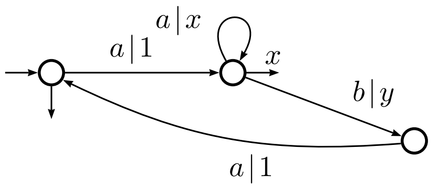
La représentation correspondant au transducteur temps-réel $\mathcal{T}_1$ est

$$I_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\ , \quad \mu_1(a) = \begin{pmatrix} x & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\ , \quad \mu_1(b) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\ , \quad T_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\ .$$

Le processus de séquentialisation appliqué à cette représentation conduit aux calculs suivants :

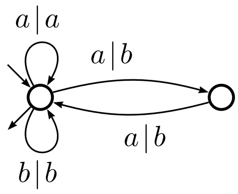
$$I_1 \cdot \mu_1(a) = \begin{pmatrix} x & y & 0 \end{pmatrix} , \quad I_1 \cdot \mu_1(aa) = \begin{pmatrix} xx & xy & 0 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} x & y & 0 \end{pmatrix} ,$$
$$I_1 \cdot \mu_1(ab) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \mu_1(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = I_1 ,$$
$$I_1 \cdot \mu_1(b) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \mu_1(a) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Ce qui donne le transducteur séquentiel $\mathcal{T}_2$ ci-dessous, dont l'automate d'entrée sous-jacent est, sans surprise, égal à $\widehat{\mathcal{A}_1}$.



4 .— ***Remplacement de facteurs.***

(i) *Soit $\alpha\colon A^* \to A^*$ la relation réalisée par le transducteur synchrone ci-dessous.*



(a) *Quelle est l'image du mot $abaabb$ par α ?*

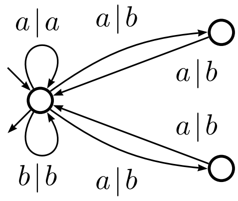
(b) *Décrire la relation α.*

(c) *Donner un transducteur qui réalise $\alpha \circ \alpha$.*

(a) $\alpha(abaabb) = \{abaabb, abbbbb\}$.

(b) La relation α associe à chaque mot u de A^* l'ensemble des mots obtenus en remplaçant dans u un nombre arbitraire (et possiblement nul) de facteurs aa (sans chevauchements) par des facteurs bb.

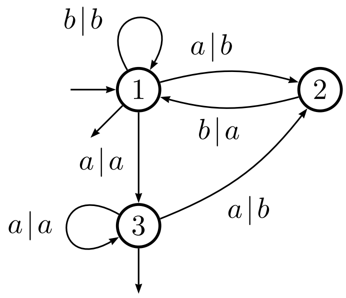
(c) La définition même de α montre que $\alpha \circ \alpha = \alpha$ et donc le transducteur $\mathcal{T}_1$ donné dans l'énoncé répond à la question. Cela dit, le calcul du composé de $\mathcal{T}_1$ par lui-même donne le transducteur ci-dessous, équivalent à $\mathcal{T}_1$.



(ii) *Soit $\beta \colon A^* \to A^*$ la relation (fonctionnelle) qui remplace tous les facteurs ab d'un mot par des facteurs ba (ce qui n'empêche pas le résultat d'avoir encore des facteurs ab). Par exemple : $\beta(abaabb) = baabab$.*

Donner un transducteur synchrone qui réalise β.

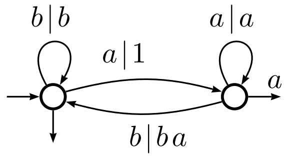
Soit 1 l'état initial d'un tel transducteur. Si on lit un 'b' on sort ce 'b' et on reste dans le même état. En revanche, la lecture d'un 'a' ouvre deux possibilités, matérialisées par deux états distincts 2 et 3 respectivement : soit ce 'a' est suivi d'un 'b' auquel cas on sort un 'b' et le 'b' qui suit donnera un 'a', soit ce 'a' est suivi d'un 'a', ou c'est la dernière lettre du mot lu auquel cas on sort un 'a'. À partir de l'état 2, on ne peux lire qu'un 'b' et retourner en 1. À partir de l'état 3, on ne peux lire qu'un 'a' et cette lecture donne lieu au même dilemne que précédemment. Tout ceci est réalisé par le transducteur $\mathcal{T}_2$ ci-dessous.



(iii) *(a) Donner un transducteur séquentiel qui réalise β.*

(b) Donner un transducteur séquentiel qui réalise $\beta \circ \beta$.

(a) On peut tenir un raisonnement similaire au précédent. À partir de l'état initial, la lecture d'un 'b' donne un 'b' et on reste dans le même état. La lecture d'un 'a' fait passer dans un état qui garde la mémoire de ce 'a'. Dans cet état, la lecture d'un 'a' montre que le 'a' précédent n'est pas suivi d'un 'b' et donc provoque la sortie d'un 'a' tout en restant dans le même état. Si le mot se termine dans cet état, il faut sortir le 'a' mis en mémoire : c'est le rôle de la fonction finale. Si on lit un 'b', comme la lettre précédente est un 'a', on a lu un facteur 'ab', on sort 'ba' et on revient dans l'état initial, ce qui donne le transducteur $\mathcal{T}_3$ ci-dessous.



On peut également appliquer le processus de séquentialisation à la représentation correspondant au transducteur $\mathcal{T}_2$:

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mu_2(a) = \begin{pmatrix} 0 & b & a \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & a \end{pmatrix}, \quad \mu_2(b) = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad .$$

Il vient :

$$I_2 \cdot \mu_2(a) = \begin{pmatrix} 0 & b & a \end{pmatrix}, \quad I_2 \cdot \mu_2(b) = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 0 & b & a \end{pmatrix} \cdot \mu_2(a) = \begin{pmatrix} 0 & ab & aa \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 0 & b & a \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 0 & b & a \end{pmatrix} \cdot \mu_2(b) = \begin{pmatrix} ba & 0 & 0 \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

et on retrouve le transducteur $\mathcal{T}_3$.

(b) Comme $\mathcal{T}_3$ n'est pas sous-normalisé, on doit utiliser la composition des représentations. La représentation correspondant au transducteur $\mathcal{T}_3$ est :

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mu_3(a) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \quad \mu_3(b) = \begin{pmatrix} b & 0 \\ ba & 0 \end{pmatrix}, \quad T_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} \quad .$$

La composition de cette représentation par elle-même donne :

$$I_3 \cdot \mu_3(I_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mu_3(T_3) \cdot T_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ a \\ aa \end{pmatrix},$$

$$[\mu_3 \circ \mu_3](a) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \quad [\mu_3 \circ \mu_3](b) = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 & 0 \\ ba & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & ba & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Et cette représentation correspond au transducteur séquentiel ci-dessous :