Leçon 4

Transducteurs et relations synchrones

Le modèle des transducteurs que nous avons décrits à la Leçon 1 définit une famille de relations en un sens trop générale puisqu'une question aussi simple que l'universalité y est indécidable. Cette famille a également le défaut de ne pas être fermée par complémentation, ce qui exclut toute possibilité de définition en terme de logique. Le sujet de cette leçon est la définition d'une classe restreinte de relations rationnelles qu'on appellera *relations synchrones*, toujours à partir des transducteurs qui les réalisent, et qui va jouir d'à peu près toutes les bonnes propriétés des langages rationnels d'un monoïde libre : complémentation, décidabilité de l'équivalence, *etc.*

Contents

4.1 Définitions et exemples

4.1.1 Transducteurs synchrones

On commence par la définition d'une condition sur les états d'un *transducteur sous-normalisé* donc, en particulier, *propre*.

Définition 1 (Condition de calage)**.**

Soit $\mathcal{T}$ un transducteur sous-normalisé *sur $A^*\times B^*$.*

Un état q de $\mathcal{T}$ est dit calé *si, s'il y a* une *transition* entrante *en q étiquetée dans $(1_{A^*}\times B)$ (resp. dans $(A\times 1_{B^*})$) alors* toutes *les transitions* sortantes *de q sont étiquetées dans $(1_{A^*}\times B)$ (resp. dans $(A\times 1_{B^*})$).*

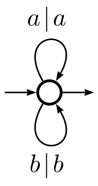
En particulier, un état dont aucune transition entrante n'est étiquetée ni dans $(1_{A^*}\times B)$ ni dans $(A\times 1_{B^*})$ est calé.

Définition 2. *Un transducteur est dit* synchrone *s'il est sous-normalisé et si tous ses états sont calés.*

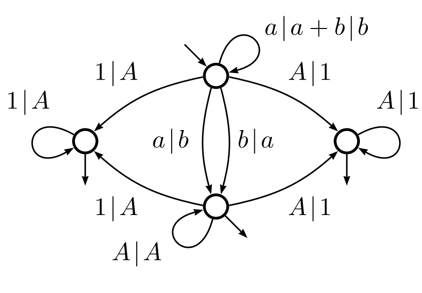
Exemple 3. (i) Le transducteur pour l'identité (figure 1(a)) et, plus généralement, tous les transducteurs *lettre-à-lettre* sont synchrones.

(ii) Le transducteur que nous avons donné pour le *complément de l'identité* (figure 2.2 et figure 1(b)) est synchrone.

(iii) Les transducteurs des figure 2(a) et (b), qui réalisent respectivement l'ordre lexicographique et l'ordre radiciel, sont synchrones. On remarque que le premier est obtenu en supprimant un état et une transition du transducteur qui réalise le complément de l'identité.



(a)



(b)

FIG. 1 – Deux transducteurs synchrones

Il faut bien noter que la définition de transducteur synchrone n'a de sens qu'à travers celle de transducteur *sous-normalisé*. Comme le rappelle l'exemple de la figure 3 ci-dessous, tout transducteur est équivalent à un transducteur *normalisé*, et donc toute relation rationnelle est réalisée par une transducteur normalisé, mais la propriété de synchronicité ne peut être définie que sur des transducteurs *sous-normalisés*.

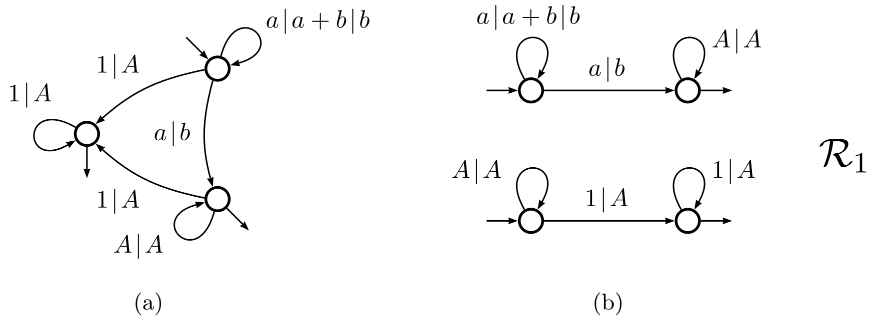


FIG. 2 – Deux transducteurs synchrones

4.1.2 Relations synchrones

Définition 4. *Une relation rationnelle est dite* synchrone *s'il existe un transducteur synchrone qui la réalise. On note* $\mathrm{Syn}\, A^* \times B^*$ *la famille des relations rationnelles synchrones de* A^* *dans* B^* *(et qu'on appellera simplement* relations synchrones*).*

Si l'on échange l'entrée et la sortie dans les étiquettes d'un transducteur synchrone, on obtient encore une transducteur synchrone, d'où l'on conclut :

Proposition 5. *L'inverse d'une relation synchrone est une relation synchrone.* ■

Une relation synchrone peut très bien être réalisée par un transducteur non synchrone. L'exemple le plus simple est sans doute celui de la relation universelle, comme montré à la figure 3 : en (a), le transducteur obtenu par élimination des transitions spontées à partir du transducteur de l'exemple 1.11 (i), en (b), un transducteur synchrone $\mathcal{U}_1$ équivalent. C'est un exercice intéressant de généraliser cette propriété à toutes les relations rationnelles décrites à l'exemple 1.11 :

Proposition 6. *Soient* K *dans* $\mathrm{Rat}\, A^*$ *et* L *dans* $\mathrm{Rat}\, B^*$*. Alors* $K \times L$ *est le graphe d'une relation synchrone de* A^* *dans* B^**.* ■

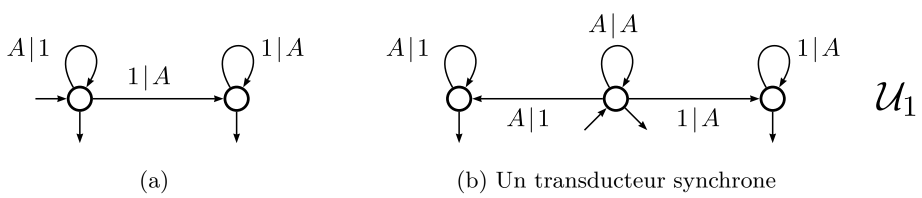


FIG. 3 – Deux transducteurs réalisant la relation universelle

La notion de relation synchrone est *orientée* parce que celle de transducteur synchrone l'est : en toute rigueur, il aurait été plus juste de parler d'état *calé à gauche* et par là, de transducteur, puis de relation, *synchrone à gauche*. Et de définir de façon duale un état *calé à droite* qui permet la définition de transducteur, puis de relation, *synchrone à droite*: un état q d'un transducteur *sous-normalisé* $\mathcal{T}$ sur $A^* \times B^*$ est *calé à droite* si, s'il y a *une* transition *sortante* en q étiquetée dans $(1_{A^*} \times B)$ (resp. dans $(A \times 1_{B^*})$) alors *toutes* les transitions *entrantes* de q sont étiquetées dans $(1_{A^*} \times B)$ (resp. dans $(A \times 1_{B^*})$).

Un transducteur est synchrone *à droite* s'il est sous-normalisé et si tous ses états sont calés à droite et une relation est synchrone à droite si elle est réalisée par un transducteur synchrone à droite.

Il découle de ces définitions que le *transposé* d'un transducteur synchrone à gauche est un transducteur synchrone à droite. Le transposé du transducteur $\mathcal{U}_1$ réalise encore la relation universelle, qui est donc une relation à la fois synchrone à gauche et synchrone à droite. Mais ce n'est pas le cas en général. Les transducteurs $\mathcal{V}_1$ et $\mathcal{W}_1$ de l'exemple 2.10 (figure 4) sont respectivement synchrones à gauche et à droite de même que les relations α_1 et β_1 de $\{a, b\}^*$ dans $\{c\}^*$ qu'ils réalisent, mais β_1 n'est pas synchrone à gauche, et α_1 n'est pas synchrone à droite.

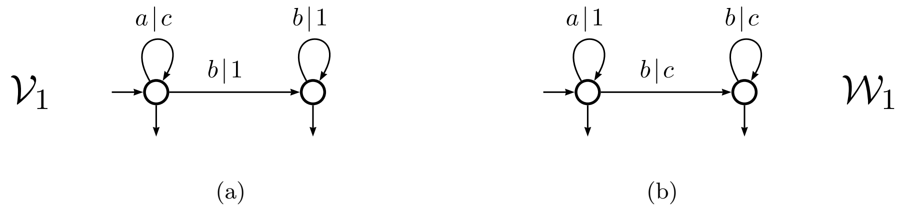


Fig. 4 – Un transducteur synchrone à gauche et un transducteur synchrone à droite

Dans toute la suite, on dit « synchrone » pour « synchrone à gauche ».

4.1.3 Justification du nom « synchrone »

On comprend mieux le terme « synchrone » utilisé pour les transducteurs dont les états satisfont la condition de calage si on revient à la modélisation des transducteurs par des machines de Turing spéciales.

On a vu à la Leçon 1 que les transducteurs finis sur $A^* \times B^*$ sont (fortement) équivalents aux machines de Turing unidirectionnelles à 2 bandes. Les transducteurs synchrones sont (fortement) équivalents à ce modèle de machines dans lequel on a rendu les deux têtes de lecture solidaires, et *qui se déplacent donc de manière synchrone*.

Le déplacement de la tête de lecture sur la bande qui contient le mot le plus long conduit à matérialiser le « blanc » sur l'autre bande qui est lue au-delà du mot qu'elle porte (et d'un éventuel sympbole de finde bande). Cela est fait, traditionnellement, par l'usage du symbole \$, supposé n'appartenir à aucun des deux alphabets A et B (*cf.* figure 5).

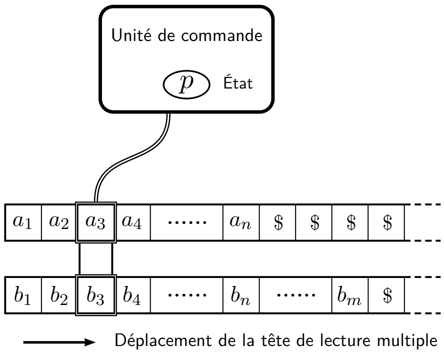


FIG. 5 – Machine de Turing unidirectionnelle synchrone à 2 bandes

4.2 Propriétés des relations synchrones

La famille des relations synchrones jouit des propriétés essentielles que possèdent les langages rationnels, tout en conservant celle des relations rationnelles, ce que l'on peut exprimer par les deux théorèmes suivants.

Théorème 7. Syn $A^* \times B^*$ *est une algèbre de Boole effective.*

Théorème 8. Syn $A^* \times B^*$ *est fermée par composition.*

4.2.1 Déterminisation des transducteurs synchrones

Soient A et B deux alphabets ; on note, pour la suite de la section,

$$C = A \times B\ ,\quad A' = A \times 1_{B^*}\ ,\quad B' = 1_{A^*} \times B \quad \text{et} \quad D = C \cup A' \cup B'\ .$$

On peut voir tout transducteur sous-normalisé sur $A^* \times B^*$ comme un automate sur l'alphabet D. Dans ce contexte, un tel transducteur $\mathcal{T}$ est synchrone si tout état qui a une transition entrante étiquetée dans A' a toutes ses transitions sortantes étiquetées dans A' et si tout état qui a une transition entrante étiquetée dans B' a toutes ses transitions sortantes étiquetées dans B', c'est juste une redite de la définition 2.

Définition 9. *Un transducteur synchrone sur $A^* \times B^*$ est dit* déterministe *s'il est déterministe en tant qu'automate sur D, c'est-à-dire si le transducteur a au plus un état initial et si pour chaque état q et chaque lettre d de D il existe au plus une transition sortant de q étiquetée par d.*[1]

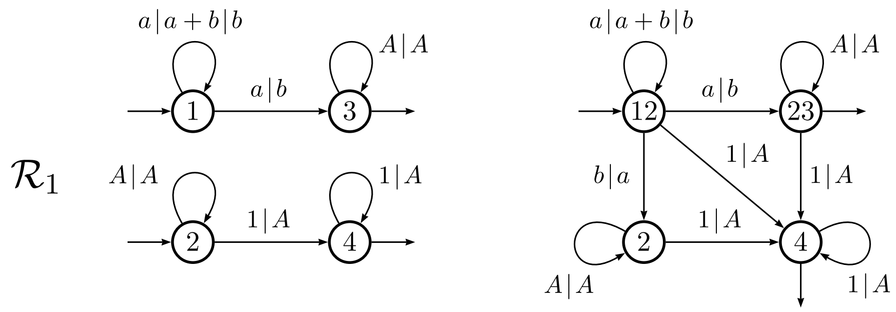
[1] À première vue, il semblerait qu'on puisse définir de la même manière des transducteurs déterministes dès qu'ils sont sous-normalisés. En fait, ce ne serait pas judicieux car cela ne permettrait pas d'atteindre les propriétés souhaitées (en gros, la fermeture par complémentation). Une définition de transducteurs déterministes plus généraux est possible (*cf.* ETA IV.5) mais ne sera pas traitée dans ce cours.

Tous les transducteurs synchrones représentés jusqu'ici dans cette leçon sont déterministes, sauf $\mathcal{R}_1$ (figure 2 (b)).

Proposition 10. *Tout transducteur synchrone est équivalent à un transducteur synchrone déterministe.*

Démonstration. On applique l'algorithme « classique » de construction du déterminisé d'un automate par la méthode dite « des sous-ensembles » en prenant garde de ne considérer à chaque étape que les lettres « utiles ». Cette dernière condition assure que le résultat est bien un transducteur synchrone. ■

Exemple 11. La figure 6 montre la déterminisation du transducteur $\mathcal{R}_1$.



(a) (b)

FIG. 6 – Un transducteur synchrone et son déterminisé.

4.2.2 Complétion des transducteurs synchrones

Le processus de complétion d'un automate fini classique sur un monoïde libre est très simple : addition d'un état-puits et ajout des transitions manquantes depuis chaque état de l'automate vers cet état-puits. Le cas des transducteurs synchrones demande un peu plus de précautions. On commence par *éclater* les états pour assurer l'homogénéité des transitions entrantes, puis on complète en ajoutant non pas un mais *trois* états-puits, toujours pour assurer cette homogénéité.

Éclatement d'états On désigne sous ce nom une méthode de construction de *revêtements* d'automates.

Soient $\mathcal{A}$ un automate, q un état de $\mathcal{A}$, et une partition de $\mathsf{In}_{\mathcal{A}}(q)$, l'ensemble des *transitions entrantes* en q (y compris une éventuelle transition depuis l'état initial subliminal), en k sous-ensembles, $1 \leqslant k$. On construit alors un automate $\mathcal{B}$ en « éclatant » l'état q en k états : $q_1, q_2, \ldots, q_k$. Les transitions entrantes en q_i sont les transitions du i-ème sous-ensemble de la partition de $\mathsf{In}_{\mathcal{A}}(q)$ et on reproduit en chaque état q_i les transitions sortantes de q (y compris une éventuelle transition vers l'état final subliminal). Un éclatement simple, mais qui traite le cas des boucles, est montré à la figure 7 (la partition est réalisée par l'alternative transition simple, transition double).

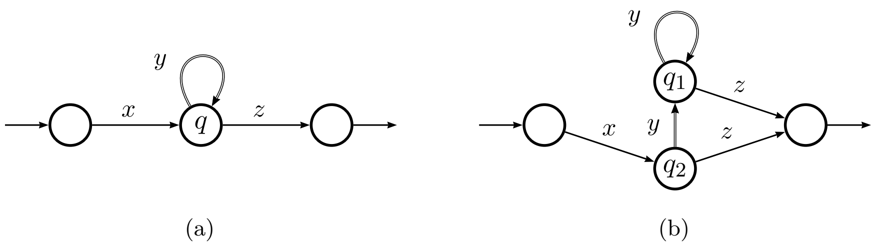


FIG. 7 – Transformation par éclatement d'un état.

L'application qui envoie tous les états q_i sur q (et qui fixe tous les autres états) est à l'évidence un revêtement de $\mathcal{B}$ sur $\mathcal{A}$. Une succession d'éclatements d'états donne donc un revêtement de l'automate de départ et on vérifie aisément que le résultat ne dépend pas de l'ordre dans lequel les états sont éclatés mais seulement des partitions choisies sur les ensembles de partitions entrantes (*cf.* figure 8).

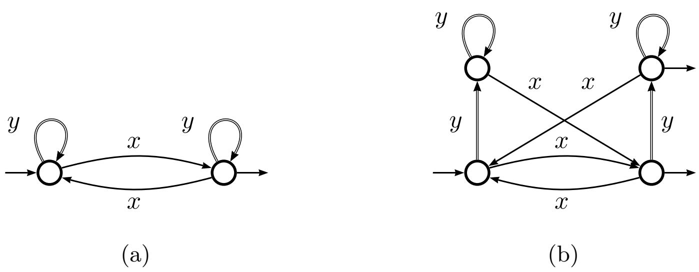


FIG. 8 – Eclatements de deux états dont on vérifie qu'ils commutent.

Transducteurs synchrones homogènes

Définition 12. *Nous dirons qu'un transducteur synchrone sur $A^* \times B^*$ est* homogène *si les transiitons* entrantes *dans chaque état sont étiquetées* soit *dans C — auquel cas l'état est dit de type C —* soit *dans A' — auquel cas l'état est dit de type A' —* soit *dans B' — auquel cas l'état est dit de type B'.*

Tous les transducteurs synchrones représentés jusqu'ici dans cette leçon sont homogènes, mais ce n'est pas nécessairement le cas. En revanche, le fait d'avoir une étiquette dans C, dans A' ou dans B' réalise ipso facto une partition des transitions entrantes dans chaque état d'un transducteur synchrone et la méthode des éclatements d'états implique directement :

Proposition 13. *Tout transducteur synchrone admet comme revêtement un transducteur synchrone homogène.*

Remarque 14. Si un état initial d'un transducteur synchrone a une transition entrante étiquetée dans A' (ou dans B'), alors toutes les transitions sortantes de cet état, de même que toute la partie accessible à partir de cet état, sont étiquetées de la même façon. Cette partie du transducteur ne contribue au graphe de la relation que par un ensemble rationnel de $A^* \times 1_{B^*}$ (ou $1_{A^*} \times B^*$), ce que l'on peut toujours traiter séparément. On peut donc sans perte de généralités supposer que tous les états initiaux d'un transducteur synchrone sont de type C et donc non affectés par les éclatements d'états qui vont rendre ce transducteur homogène.

Le transducteur $\mathcal{U}_1$ (figure 3 (b)) possède un état de type C, un état de type A' et un état de type B'. Pour tout transducteur synchrone homogène $\mathcal{T}$ (et sous l'hypothèse implicite de la remarque), l'application qui envoie tous les états de type C (resp. de type A', de type B') de $\mathcal{T}$ sur l'état de type C (resp. de type A', de type B') de $\mathcal{U}_1$ est un morphisme d'automates.

Transducteurs synchrones complets

Définition 15. *Un transducteur synchrone sur $A^* \times B^*$ est dit* complet *si*

(i) *il est homogène ;*

(ii) *si pour chaque état q de type C et chaque lettre d de D il existe au moins une transition sortante de q étiquetée par d ;*

(iii) *si pour chaque état q de type A' (resp. de type B') et chaque lettre x de A' (resp. de B'), il existe au moins une transition sortante de q étiquetée par x.*

Proposition 16. *Tout transducteur synchrone (déterministe) est équivalent à un transducteur synchrone (déterministe) complet.*

Démonstration. On commence par prendre un revêtement homogène du transducteur en question. On adapte ensuite l'algorithme « classique » de complétion d'un automate en ajoutant non pas un, mais *trois* états-puits : un par type d'états. Avec cette condition, le résultat est bien un transducteur synchrone homogène, et le déterminisme est évidemment préservé. ∎

Exemple 17. La figure 9 montre la complétion du transducteur déterministe de la figure 6.

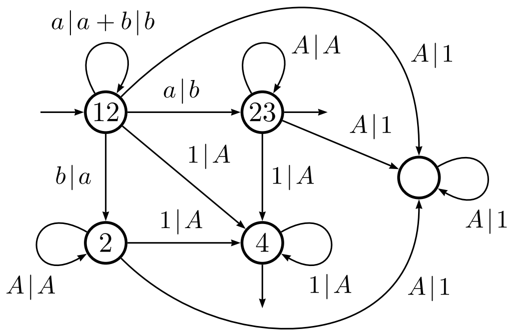


FIG. 9 – Un transducteur synchrone déterministe complété.

Si dans un transducteur synchrone complet $\mathcal{T}$, on rend tous les états finals, l'application qui envoie tous les états de type C (resp. de type A', de type B') de $\mathcal{T}$ sur l'état de type C (resp. de type A', de type B') de $\mathcal{U}_1$ est un Out-morphisme. Si de plus $\mathcal{T}$ est déterministe, cette application est un revêtement. On en déduit que si dans un transducteur synchrone déterministe complet $\mathcal{T}$, on « échange » les états finals et non finals, on obtient un transducteur synchrone (déterministe complet) qui réalise le complément de la relation réalisée par $\mathcal{T}$. C'est précisément de cette façon qu'a été obtenu, à partir du transducteur de la figure 1 (a), le transducteur de la figure 1 (b) qui réalise le complément de l'identité.

Des propositions 10 et 16, on déduit alors :

Corollaire 18. *Le complément d'une relation synchrone θ est une relation synchrone et un transducteur synchrone qui la réalise est effectivement calculable à partir de tout transducteur synchrone qui réalise θ.*

Et le Théorème 7 est la conséquence directe et immédiate de ce corollaire. ■

Remarque 19. C'est la propriété de synchronicité qui impose de rendre les transducteurs homogènes avant de pouvoir les compléter. Si cette précaution n'est pas prise, par exemple si un état q est la destination d'une transition étiquetée dans C et d'une transition étiquetée dans A', on ne peut compléter le bouquet sortant de q par des transitions étiquetées dans C. Dès lors, on n'est plus assuré que le comportement d'un transducteur complété et dont tous ls états sont finaux est $A^* \times B^*$ tout entier, ce qui est nécessaire pour établir le Corollaire 18, et donc le Théorème 7.

Il s'ensuit du Théorème 7 que tous les problèmes de décision à l'intérieur de la famille des relations synchrones (vide, équivalence, inclusion) sont résolus positivement. Il faut noter, en revanche, (et même si nous ne le démontrerons pas) que la famille $\mathrm{Syn}\, A^* \times B^*$ n'est pas décidable dans $\mathrm{Rat}\, A^* \times B^*$:

Théorème 20.

Il est récursivement indécidable si une relation rationnelle est synchrone.

4.2.3 Composition des transducteurs synchrones

On vérifie de façon élémentaire, au cas par cas, type d'états après type d'états, que la construction du composé de deux transducteurs telle que décrite dans la preuve du Théorème 1.15 et appliquée à deux transducteurs synchrones donne un transducteur synchrone, ce qui établit le Théorème 8. ■

4.3 Relations à différence de longueurs bornée

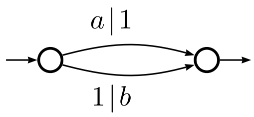
4.4 Exercices

1..— (a) Montrer que si K est dans $\operatorname{Rat} A^*$ et L dans $\operatorname{Rat} B^*$, $K \times L$ est le graphe d'une relation synchrone de A^* dans B^* (proposition 6).

(b) Montrer que $K \times L$ est également le graphe d'une relation synchrone à droite.

2..— Montrer que α_1 n'est pas une relation synchrone à droite et que β_1 n'est pas une relation synchrone à gauche.

3..— Compléter le transducteur synchrone ci-dessous.



4..— Soit A un alphabet totalement ordonné. L'ordre radiciel est un *bon ordre* sur A^* et donc sur tout sous-ensemble (langage) L. Cet ordre permet de définir, pour tout langage L de A^*, la *fonction successeur* Succ_L qui envoie chaque mot de L sur son successeur dans L dans l'ordre radiciel.

Montrer que si L est un langage rationnel de A^*, alors Succ_L est une relation (fonctionelle) synchrone (donc *rationnelle*).