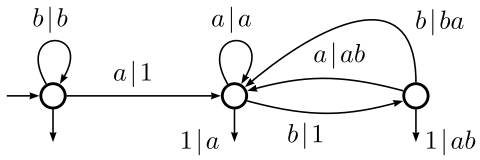
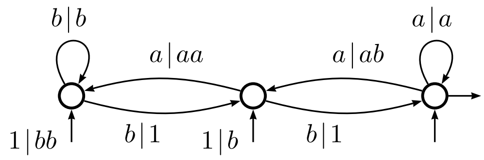
Leçon 6 — Exercices

1 .— **Un exemple de composition.** Donner un transducteur qui réalise la composition de la relation réalisée par le transducteur ci-dessous à gauche par celle réalisée par le transducteur ci-dessous à droite.





2 .— **Choisir son uniformisation.** Si $\theta\colon A^* \to B^*$ est une relation, on note θ_{rad} l'*uniformisation radicielle* de θ, c'est-à-dire pour chaque w dans $\mathsf{Dom}\,\theta$, $\theta_{\mathsf{rad}}(w)$ est le plus petit mot de $\theta(w)$ dans l'ordre radiciel. De façon analogue, θ_{lex} est la *sélection lexicographique* de θ, c'est-à-dire pour chaque w dans $\mathsf{Dom}\,\theta$, $\theta_{\mathsf{lex}}(w)$ est le plus petit mot de $\theta(w)$ dans l'ordre lexicographique, s'il existe, et est indéfinie sinon.

Soit $A = \{a,b,c\}$ un alphabet ordonné, avec $a < b < c$, et soit θ une relation rationnelle de A^* dans lui-même dont le graphe est donné par :

$$\widehat{\theta} = (a,a)^*\,(b,1)^*\,(1,b) \,\cup\, (a,1)^*\,(b,a)^*\,(1,c) \quad .$$

Montrer que ni θ_{lex} ni θ_{rad} ne sont des uniformisations rationnelles.

3 .— **Uniformisation des relations synchrones.** Montrer que l'uniformisation radicielle et que la sélection lexicographique d'une relation synchrone sont des relations synchrones.

4 .— **Écriture des nombres.** On écrit les nombres entiers en base 2 de manière naturelle, c'est-à-dire les chiffres les plus significatifs à gauche et l'entier représenté par un mot w est noté $\pi(w)$: $\pi(1\,0\,0\,0) = 8$.

On va utiliser différents alphabets de chiffres : $A_2 = \{0,1\}$, l'alphabet canonique pour l'écriture des nombres en binaire, mais aussi $B = \{0,1,2\}$, $C = \{\bar{1},0,1\}$, et $D = \{\bar{2},\bar{1},0,1,2\}$ où $\bar{1}$ et $\bar{2}$ représentent les 'chiffres' -1 et -2. Par exemple : $\pi(1\,\bar{2}\,1\,\bar{1}) = 1$. Quel que soit l'alphabet de chiffres, pour tout mot w, on a ;

$$w = a_k\,a_{k-1}\cdots a_1\,a_0 \quad \longmapsto \quad \pi(w) = \sum_{i=0}^{k} a_i 2^i \quad .$$

(a) On considère l'automate $\mathcal{Z} = \langle\, D, \mathbb{Z}, \{0\}, E, \{0\}\,\rangle$ a priori infini et dont les transitions sont définies par :

$$\forall s,t \in \mathbb{Z}\,,\ \forall d \in D \qquad s \xrightarrow[\mathcal{Z}]{d} t \qquad \Longleftrightarrow \qquad t = 2\,s + d \quad .$$

i) Montrer que l'ensemble des mots de D^* acceptés par $\mathcal{Z}$ sont ceux dont la valeur est nulle : $\big|\mathcal{Z}\big| = \{w \in D^* \mid \pi(w) = 0\}$.

ii) Montrez que la partie émondée de $\mathcal{Z}$ est finie et la représenter.

(b) Soit $\nu\colon B^* \to A_2^*$ la fonction de normalisation, c'est-à-dire la fonction qui à chaque mot u de B^* associe le mot de A_2^* qui représente $\pi(u)$.

i) Donner un transducteur lettre-à-lettre qui réalise ν.

ii) Expliquer pourquoi on peut considérer que ce transducteur réalise l'addition sur $\mathbb{N}$.

On pourra s'affranchir de la contrainte que les nombres ne commencent pas par 0 et, au contraire, on pourra toujours supposer que, quand c'est nécessaire, w commence par un 0.

iii) Que peut-on dire du transposé de ce transducteur ?

(c) Soit $\gamma\colon A_2^* \to C^*$ la relation qui à chaque mot w de A_2^* associe *tous* les mots de C^* qui ont la même valeur $\pi(w)$.

Donner un transducteur qui réalise γ.

(d) On appelle *forme normale de Booth* d'un entier n le mot de C^* dont la valeur est n et dans lequel il n'y a pas deux chiffres non nuls consécutifs et $\beta\colon A_2^* \to C^*$ la fonction qui à chaque mot w de A_2^* associe la forme normale de Booth de $\pi(w)$. Par exemple : $\beta(0\,1\,1) = 1\,0\,\bar{1}$, $\beta(1\,0\,1\,1) = 1\,0\,\bar{1}\,0\,\bar{1}$

i) Donner un transducteur lettre-à-lettre qui réalise β.

On voit sur les exemples précédents que, comme ci-dessus, on pourra toujours supposer que, quand c'est nécessaire, w commence par un 0.

ii) Donner un transducteur lettre-à-lettre *droit*, c'est-à-dire qui lit les mots de droite à gauche, qui réalise β.

Il s'agit évidemment de faire mieux que d'inverser simplement le sens des transitions dans le transducteur précédent.