Théories des jeux
(notes de cours)

David A. Madore

8 février 2021

MITRO206

Git : `4429bed Thu Jun 25 16:53:34 2020 +0200`

Table des matières

1 Introduction et typologie

1.1 La notion de jeu mathématique : généralités

1.1.1. Il n'existe pas une théorie des jeux mais *des* théorie*s* des jeux.

Il n'est pas possible de donner une définition générale précise de la notion de « jeu mathématique ». On verra plus loin des définitions précises de certains types de jeux (p. ex., les jeux impartiaux à information parfaite), mais il n'existe pas de définition générale utile qui s'applique à tous ces types, et à partir de laquelle on pourrait développer une théorie intéressante.

Pire, différentes disciplines se sont développées sous le nom de « théorie des jeux », chacune donnant une définition différente de ce qu'est un « jeu ». Par exemple, l'étude des jeux « en forme normale » (=jeux définis par des matrices de gains), la théorie combinatoire des jeux (jeux à information parfaite), la théorie des jeux logiques, la théorie des jeux différentiels, etc. Il n'existe donc pas une mais plusieurs théories des jeux.

Ces différentes théories des jeux intersectent différentes branches des mathématiques ou d'autres sciences : probabilités, optimisation/contrôle, combinatoire, logique, calculabilité, complexité, analyse/EDP ou encore (en-dehors ou en marge des mathématiques), économie, cryptographie, physique quantique, cybernétique, biologie, sociologie, linguistique, philosophie.

Il va de soi qu'on ne pourra dans ce cours donner qu'un aperçu de quelques unes de ces théories des jeux.

1.1.2. Une tentative pour approcher la notion de jeu mathématique : le jeu possède un **état**, qui évolue dans un ensemble (fini ou infini) d'états ou **positions** possibles ; un certain nombre de **joueurs** choisissent, simultanément ou consécutivement, un **coup** à jouer parmi différentes **options**, en fonction de l'état courant, ou peut-être seulement d'une fonction de l'état courant ; ce coup peut éventuellement faire intervenir un aléa (hasard voulu par le joueur) ; l'état du jeu évolue en fonction des coups des joueurs et éventuellement d'un autre aléa (hasard intrinsèque au jeu) ; au bout d'un certain nombre de coups (fini ou infini), la règle du jeu attribue, en fonction de l'état final, ou de son évolution complète, un **gain** à chaque joueur, ce gain pouvant être un réel (gain numérique), l'étiquette « gagné » / « perdu », ou encore autre chose, et chaque joueur cherche en priorité à maximiser son gain (i.e., à gagner le plus possible, ou à gagner tout court), ou dans le cas probabiliste, son espérance de gain.

Mais même cette définition très vague est incomplète !, par exemple dans le cas des jeux différentiels, les coups n'ont pas lieu tour à tour mais continûment.

Une **stratégie** d'un joueur est la fonction par laquelle il choisit son coup à jouer en fonction de l'état du jeu (ou de la fonction de l'état qui lui est présentée), et d'aléa éventuel. On peut ainsi résumer le jeu en : chaque joueur choisit une stratégie, et la règle du jeu définit alors un gain pour chaque joueur. Les stratégies peuvent être contraintes de différentes manières (par exemple : être calculables par une machine de Turing). Une stratégie est dite **gagnante** si le joueur qui l'utilise gagne le jeu (supposé avoir une notion de « joueur gagnant ») quels que soient les coups choisis par l'autre joueur.

Il faut aussi se poser la question de si les joueurs peuvent communiquer entre eux (et si oui, s'ils peuvent prouver leur honnêteté ou s'engager irrévocablement quant au coup qu'ils vont jouer, etc.). Dans certains cas, on peut aussi être amené à supposer que les joueurs ne connaissent pas toute la règle du jeu (voir « information complète » ci-dessous).

1.2 Quelques types de jeux

1.2.1. Le **nombre de joueurs** est généralement 2. On peut néanmoins étudier des jeux multi-joueurs, ce qui pose des questions d'alliances et compliquer la question des buts (un joueur peut être incapable de gagner lui-même mais être en situation de décider quel autre joueur gagnera : on parle de « kingmaker »). On peut aussi étudier des jeux à un seul joueur (jouant contre le hasard), voire à zéro joueurs (systèmes dynamiques), mais ceux-ci relèvent plutôt d'autres domaines. Dans ce cours, on s'intéressera (presque uniquement) aux jeux à deux joueurs.

1.2.2. Les joueurs peuvent avoir **des intérêts communs, opposés, ou toute situation intermédiaire**.

Le cas d'intérêts communs est celui où tous les joueurs ont le même gain. Si les joueurs peuvent parfaitement communiquer, on est alors essentiellement ramené à un jeu à un seul joueur : on s'intéresse donc ici surtout aux situations où la communication est imparfaite.

Le cas de deux joueurs d'intérêts opposés est le plus courant : dans le cas de gains numériques, on le modélise en faisant des gains d'un joueur l'opposé des gains de l'autre — on parle alors de **jeu à somme nulle**; ou bien la règle fera qu'un et un seul joueur aura gagné et l'autre perdu (mais parfois, elle peut aussi admettre le match nul).

Toute autre situation intermédiaire est possible. Mais on conviendra bien que le but de chaque joueur est de maximiser son propre gain, sans considération des gains des autres joueurs.

1.2.3. Le jeu peut être **partial/partisan ou impartial**. Un jeu impartial est un jeu où tous les joueurs sont traités de façon équivalente par la règle (le sens de « équivalent » étant à définir plus précisément selon le type de jeu).

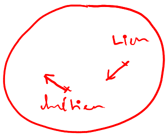
1.2.4. Les coups des joueurs peuvent avoir lieu **simultanément ou séquentiellement**.

Formellement, il s'agit seulement d'une différence de présentation. On peut toujours ramener des coups séquentiels à plusieurs coups simultanés en n'offrant qu'une seule option à tous les joueurs sauf l'un, et réciproquement, on peut ramener des coups simultanés à des coups séquentiels en cachant à chaque joueur l'information de ce que l'autre a joué. La question 1.4.1 est cependant plus intéressante.

1.2.5. Le jeu peut être à **information parfaite** ou non. Un jeu à information parfaite est un jeu dont la règle ne fait pas intervenir le hasard et où chaque joueur joue séquentiellement en ayant la connaissance complète de l'état du jeu et de tous les coups effectués antérieurement par tous les autres joueurs.

(Cette notion est parfois distinguée de la notion plus faible d'**information complète**, qui souligne que les joueurs ont connaissance complète de la *règle* du jeu, i.e., des gains finaux et des options disponibles à chaque joueur. Néanmoins, on peut formellement ramener un jeu à information incomplète en jeu à information complète en regroupant toute l'inconnue sur les règles du jeu dans des coups d'un joueur appelé « la nature ». Dans ce cours, on ne considérera que des jeux à information parfaite [et toute occurrence des mots « information complète » sera probablement un lapsus pour « information parfaite »].)

1.2.6. Le nombre de positions (= états possibles), comme le nombre d'options dans une position donnée, ou comme le nombre de coups, peut être **fini ou infini**. Même si l'étude des jeux finis (de différentes manières) est la plus intéressante pour des raisons pratiques, toutes sortes de jeux infinis peuvent être considérés, par exemple en logique (voir plus loin sur l'axiome de détermination). Pour un jeu à durée infinie, le gagnant pourra être déterminé, par exemple, par toute la suite des coups effectués par les deux joueurs ; on peut même introduire des coups après un nombre infini de coups, etc.



De même, l'ensemble des positions, des options ou des temps peut être **discret ou continu**. Dans ce cours, on s'intéressera presque exclusivement au cas discret (on écartera, par exemple, la théorie des jeux différentiels).

1.3 Quelques exemples en vrac

1.3.1. Le jeu de **pile ou face** entre Pauline et Florian. On tire une pièce non-truquée : si elle tombe sur pile, Pauline gagne, si c'est face, c'est Florian. Aucun des joueurs n'a de choix à faire. Chacun a une probabilité $\frac{1}{2}$ de gagner, ou une espérance de 0 si les gains sont $+1$ au gagnant et -1 au perdant (il s'agit donc d'un jeu à somme nulle).

Variante entre Alice et Bob : maintenant, Alice choisit « pile » ou « face » avant qu'on (Bob) tire la pièce. Si Alice a bien prévu, elle gagne, sinon c'est Bob. Ici, seule Alice a un choix à faire. Néanmoins, il n'y a pas de stratégie intéressante : la stratégie consistant à choisir « pile » offre la même espérance que celle consistant à choisir « face », et il n'existe pas de stratégie (c'est-à-dire, de stratégie mesurable par rapport à l'information dont dispose Alice) offrant une meilleure espérance.

$\downarrow A \backslash \vec{B}$	pile	face
pile	$+1,-1$	$-1,+1$
face	$-1,+1$	$+1,-1$

"jeu en forme normale"

1.3.2. Variante : Alice choisit « pile » ou « face », l'écrit dans une enveloppe scellée sans la montrer à Bob (elle s'*engage* sur son choix), et Bob, plutôt que tirer une pièce, choisit le côté qu'il montre. Si Alice a bien deviné le choix de Bob, Alice gagne, sinon c'est Bob. Variante : Bob choisit une carte dans un jeu de 52 cartes sans la montrer à Alice, et Alice doit deviner si la carte est noire ou rouge.

$\downarrow A \backslash \vec{B}$	"gagne"	"perd"
"Alice"	$+1,-1$	$-1,+1$
"Bob"	$-1,+1$	$+1,-1$

Variante équivalente : Alice choisit « Alice » ou « Bob » et Bob choisit simultanément « gagne » ou « perd ». Si la phrase obtenue en combinant ces deux mots est « Alice gagne » ou « Bob perd », alors Alice gagne, si c'est « Alice perd » ou « Bob gagne », alors Bob gagne. Encore une variante : Alice et Bob choisissent simultanément un bit (élément de $\{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}$), si le XOR de ces deux bits vaut $\mathtt{0}$ alors Alice gagne, s'il vaut $\mathtt{1}$ c'est Bob. Ce jeu est impartial (même s'il n'est pas parfaitement symétrique entre les joueurs) : Alice n'a pas d'avantage particulier sur Bob (ce qui est assez évident sur ces dernières variantes).

↓Alice, Bob→	0/« gagne »	1/« perd »
0/« Alice »	$+1, -1$	$-1, +1$
1/« Bob »	$-1, +1$	$+1, -1$

La notion de coups simultanés peut se convertir en coups engagés dans une enveloppe scellée (cf. 1.2.4).

On verra, et il est assez facile de comprendre intuitivement, que la meilleure stratégie possible pour un joueur comme pour l'autre, consiste à choisir l'une ou l'autre des deux options offertes avec probabilité $\frac{1}{2}$ (ceci assure une espérance de gain nul quoi que fasse l'autre joueur).

(En pratique, si on joue de façon répétée à ce jeu, il peut être intéressant d'essayer d'exploiter le fait que les humains ont des générateurs aléatoires assez mauvais, et d'arriver à prédire leurs coups pour gagner. Ceci est particulièrement amusant avec des petits enfants. Voir aussi la « battle of wits » du film *Princess Bride* à ce sujet.)

1.3.3. Le jeu de **pierre-papier-ciseaux** : Alice et Bob choisissent simultanément un élément de l'ensemble $\{\text{pierre}, \text{papier}, \text{ciseaux}\}$. S'ils ont choisi le même élément, le jeu est nul ; sinon, papier gagne sur pierre, ciseaux gagne sur papier et pierre gagne sur ciseaux (l'intérêt étant qu'il s'agit d'un « ordre » cyclique, totalement symétrique entre les options). Il s'agit toujours d'un jeu à somme nulle (disons que gagner vaut $+1$ et perdre vaut -1), et cette fois les deux joueurs sont en situation complètement symétrique.

"stratégie pure" "stratégie mixte"

Jeu en forme normale →

↓Alice, Bob→	Pierre	Papier	Ciseaux	$\frac{1}{3}$ Pierre + $\frac{1}{3}$ Papier + $\frac{1}{3}$ Ciseaux
Pierre	$0, 0$	$-1, +1$	$+1, -1$	0, 0
Papier	$+1, -1$	$0, 0$	$-1, +1$	0, 0
Ciseaux	$-1, +1$	$+1, -1$	$0, 0$	0, 0

"jeu à somme nulle"

On verra que la meilleure stratégie possible consiste à choisir chacune des options avec probabilité $\frac{1}{3}$ (ceci assure une espérance de gain nul quoi que fasse l'autre joueur).

Ce jeu s'appelle aussi papier-ciseaux-puits, qui est exactement le même si ce n'est que « pierre » s'appelle maintenant « puits » (donc ciseaux gagne sur papier, puits gagne sur ciseaux et papier gagne sur puits) : la stratégie optimale est évidemment la même.

Certains enfants, embrouillés par l'existence des deux variantes, jouent à pierre-papier-ciseaux-puits, qui permet les quatre options, et où on convient que la pierre tombe dans le puits : quelle est alors la stratégie optimale ? il est facile de se convaincre qu'elle consiste à ne jamais jouer pierre (qui est strictement « dominée » par puits), et jouer papier, ciseaux ou puits avec probabilité $\frac{1}{3}$ chacun (cette stratégie garantit un gain au moins nul quoi que fasse l'autre adversaire, et même strictement positif s'il joue pierre avec probabilité strictement positive).

↓Alice, Bob→	Pierre	Papier	Ciseaux	Puits	$\frac{1}{3}$ Papier + $\frac{1}{3}$ Ciseaux + $\frac{1}{3}$ Puits
Pierre	$0, 0$	$-1, +1$	$+1, -1$	$-1, +1$	$-\frac{1}{3}, +\frac{1}{3}$
Papier	$+1, -1$	$0, 0$	$-1, +1$	$+1, -1$	$0, 0$
Ciseaux	$-1, +1$	$+1, -1$	$0, 0$	$-1, +1$	$0, 0$
Puits	$+1, -1$	$-1, +1$	$+1, -1$	$0, 0$	$0, 0$

1.3.4. Le **dilemme du prisonnier** : Alice et Bob choisissent simultanément une option parmi « coopérer » ou « faire défaut ». Les gains sont déterminés par la matrice suivante :

↓Alice, Bob→	Coopère	Défaut
Coopère	$2, 2$	$0, 4$
Défaut	$4, 0$	$1, 1$

Ou plus généralement, en remplaçant $4, 2, 1, 0$ par quatre nombres T (tentation), R (récompense), P (punition) et S (*sucker*) tels que $T > R > P > S$. Ces inégalités font que chaque joueur a intérêt à faire défaut, quelle que soit l'option choisie par l'autre joueur : on se convaincra facilement que le seul équilibre de Nash (cf. 2.2.1) pour ce jeu est celui où Alice et Bob font tous deux défaut ; pourtant, tous les deux reçoivent moins dans cette situation que s'ils coopèrent mutuellement.

Ce jeu a été énormément étudié du point de vue économique, psychologique, politique, philosophique, etc., pour trouver des cadres d'étude justifiant que la coopération est rationnelle, pour expliquer en quoi le jeu itéré (=répété) diffère du jeu simple, ou pour montrer que la notion d'équilibre de Nash est perfectible.

1.3.5. Le jeu du **trouillard**, ou de la **colombe et du faucon**, obtenu en modifiant les gains du dilemme du prisonnier pour pénaliser le double défaut (maintenant appelé rencontre faucon-faucon) plus lourdement que la coopération (colombe) face au défaut. Autrement dit :

↓Alice, Bob→	("coopérer") Colombe	("défaut") Faucon	$\frac{2}{3}$ Colombe + $\frac{1}{3}$ Faucon
Colombe	$2, 2$	$0, 4$	$\frac{4}{3}, \frac{8}{3}$
Faucon	$4, 0$	$-4, -4$	$\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}$

↓A, B→	C	F	$\frac{2}{3}C+\frac{1}{3}F$
C	2,2	0,4	$\frac{4}{3}, \frac{8}{3}$
F	4,0	-4,-4	$4/3, -4/3$
$\frac{2}{3}C+\frac{1}{3}F$	$\frac{8}{3}, \frac{4}{3}$	$-\frac{4}{3}, \frac{4}{3}$	$\frac{4}{3}, \frac{4}{3}$

équilibre de Nash

Ou plus généralement, en remplaçant $4, 2, 0, -4$ par quatre nombres W (*win*), T (*truce*), L (*loss*) et X (*crash*) tels que $W > T > L > X$. Ces inégalités font que chaque joueur a intérêt à faire le contraire de ce que fait l'autre (si Bob joue faucon, Alice a intérêt à jouer colombe, et si Bob joue colombe, Alice a intérêt à jouer faucon).

(Pour justifier le nom de « jeu du trouillard », on peut évoquer le scénario d'une course de voitures vers une falaise, à la façon du film *La Fureur de vivre* : jouer colombe, c'est arrêter sa voiture avant d'arriver à la falaise, et jouer faucon, c'est ne pas s'arrêter sauf si l'autre s'est arrêté : celui qui s'arrête passe pour un trouillard et perd le jeu, mais si aucun ne s'arrête, les deux voitures tombent dans la falaise, ce qui est pire que de passer pour un trouillard.)

Ce jeu présente par exemple un intérêt en biologie, notamment pour ce qui est de l'évolution des comportements.

On pourra se convaincre que ce jeu a trois équilibres de Nash (cf. 2.2.1 ; en gros, il s'agit d'une situation dans laquelle aucun des joueurs n'améliorerait son gain en changeant *unilatéralement* la stratégie employée) : l'un où Alice joue colombe et Bob joue faucon, un deuxième où c'est le contraire, et un troisième où chacun joue colombe ou faucon avec les probabilités respectives $\frac{L-X}{W-T+L-X}$ et $\frac{W-T}{W-T+L-X}$ (avec les valeurs ci-dessus : $\frac{2}{3}$ et $\frac{1}{3}$), pour un gain espéré de $\frac{LW-TX}{W-T+L-X}$ (avec les valeurs ci-dessus : $\frac{4}{3}$).

1.3.6. La **guerre des sexes**. Alice et Bob veulent faire du sport ensemble : Alice préfère l'alpinisme, Bob préfère la boxe, mais tous les deux préfèrent faire quelque chose avec l'autre que séparément. D'où les gains suivants :

↓Alice, Bob→	Alpinisme	Boxe
Alpinisme	$2, 1$	$0, 0$
Boxe	$0, 0$	$1, 2$

Ou plus généralement, en remplaçant $2, 1, 0$ par trois nombres P (préféré), Q (autre), N (nul) tels que $P > Q > N$.

Ce jeu présente par exemple un intérêt en sociologie, notamment pour ce qui est de la synchronisation autour d'une ressource commune (par exemple l'adoption d'un standard).

On pourra se convaincre que ce jeu a trois équilibres de Nash (cf. 2.2.1) : l'un où les deux joueurs vont à l'alpinisme, un deuxième où les deux vont à la boxe, et un troisième où chacun va à son activité préférée avec probabilité $\frac{P-N}{P+Q-2N}$ et à l'autre avec probabilité $\frac{Q-N}{P+Q-2N}$ (avec les valeurs ci-dessus : $\frac{2}{3}$ et $\frac{1}{3}$), pour un gain espéré de $\frac{PQ-N^2}{P+Q-2N}$ (avec les valeurs ci-dessus : $\frac{2}{3}$). Remarquablement, ce gain espéré est inférieur à Q.

1.3.7. Le **jeu du partage** ou **de l'ultimatum** : Alice et Bob ont 10 points à se partager : Alice choisit un k entre 0 et 10 entier (disons), la part qu'elle se propose de garder pour elle, *puis* Bob choisit, en fonction du k proposé par Alice, d'accepter ou de refuser le partage : s'il accepte, Alice reçoit le gain k et Bob reçoit le gain $10 - k$, tandis que si Bob refuse, les deux reçoivent 0. Cette fois, il ne s'agit pas d'un jeu à somme nulle !

Variante : Alice choisit k et *simultanément* Bob choisit $\varphi\colon \{0, \ldots, 10\} \to \{\text{accepte}, \text{refuse}\}$. Si $\varphi(k) = \text{accepte}$ alors Alice reçoit k et Bob reçoit $10 - k$, tandis que si $\varphi(k) = \text{refuse}$ alors Alice et Bob reçoivent tous les deux 0. Ceci revient (cf. 1.4.1) à demander à Bob de préparer sa réponse $\varphi(k)$ à tous les coups possibles d'Alice (notons qu'Alice n'a pas connaissance de φ quand elle choisit k, les deux sont choisis simultanément). On se convainc facilement que si Bob accepte k, il devrait aussi accepter tous les $k' \leq k$, d'où la nouvelle :

Variante : Alice choisit k entre 0 et 10 (la somme qu'elle propose de se garder) et *simultanément* Bob choisit ℓ entre 0 et 10 (le maximum qu'il accepte qu'Alice garde pour elle) : si $k \leq \ell$ alors Alice reçoit k et Bob reçoit $10 - k$, tandis que si $k > \ell$ alors Alice et Bob reçoivent tous les deux 0.

Ce jeu peut sembler paradoxal pour la raison suivante : dans la première forme proposée, une fois k choisi, on il semble que Bob ait toujours intérêt à accepter le partage dès que $k < 10$ (il gagnera quelque chose, alors que s'il refuse il ne gagne rien) ; pourtant, on a aussi l'impression que refuser un partage pour $k > 5$ correspond à refuser un chantage (Alice dit en quelque sorte à Bob « si tu n'acceptes pas la petite part que je te laisse, tu n'auras rien du tout »).

Dans la troisième forme, qui est censée être équivalente, on verra qu'il existe plusieurs équilibres de Nash, ceux où $\ell = k$ (les deux joueurs sont d'accord sur le partage) et celui où $k = 10$ et $\ell = 0$ (les deux joueurs demandent tous les deux la totalité du butin, et n'obtiennent rien).

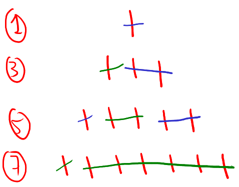
1.3.8. Un jeu idiot : Alice et Bob choisissent simultanément chacun un entier naturel. Celui qui a choisi le plus grand gagne (en cas d'égalité, on peut déclarer le nul, ou décider arbitrairement qu'Alice gagne — ceci ne changera rien au problème). Ce jeu résiste à toute forme d'analyse intelligente, il n'existe pas de stratégie gagnante (ni d'équilibre de Nash, cf. plus haut), on ne peut rien en dire d'utile.

Cet exemple sert à illustrer le fait que dans l'étude des jeux sous forme normale, l'hypothèse de finitude des choix sera généralement essentielle.

1.3.9. Le jeu d'un graphe : soit G un graphe orienté (cf. 4.1.1 ci-dessous pour la définition) et x_0 un sommet de G. Partant de x_0, Alice et Bob choisissent tour à tour une arête à emprunter pour arriver dans un nouveau sommet (c'est-à-dire : Alice choisit un voisin sortant x_1 de x_0, puis Bob un voisin sortant x_2 de x_1, puis Alice x_3 de x_2 et ainsi de suite). *Le perdant est celui qui ne peut plus jouer*, et si ceci ne se produit jamais (si on définit un chemin infini $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots$) alors la partie est déclarée nulle (ceci ne peut pas se produire lorsque le graphe G est « bien-fondé »). On verra qu'il s'agit là du cadre général dans lequel on étudie la théorie combinatoire des jeux impartiaux à information parfaite (cf. 3.4.1), et qu'un des joueurs a forcément une stratégie gagnante ou bien les deux joueurs une stratégie assurant le nul (si le nul est possible) (cf. 3.4.4).

Dans une variante du jeu, celui qui ne peut plus jouer gagne au lieu de perdre : on parle alors de la variante « misère » du jeu.

On peut aussi considérer un graphe dont les arêtes peuvent être coloriées de trois couleurs possibles : des arêtes rouges, qui ne peuvent être suivies que par Alice, des arêtes bleues, qui ne peuvent être suivies que par Bob, et des arêtes vertes (équivalentes à une arête rouge *et* une arête bleue entre les mêmes deux sommets), qui peuvent être suivies par l'un ou l'autre joueur (le cas précédent est donc équivalent à celui d'un graphe entièrement vert). Il s'agira là du cadre général dans lequel on étudie la théorie combinatoire des jeux *partiaux* à information parfaite : on verra que, si le nul est rendu impossible, quatre cas sont possibles (Alice a une stratégie gagnante qui que soit le joueur qui commence, ou Bob en a une, ou le premier joueur a une stratégie gagnante, ou le second en a une).



1.3.10. Le **jeu de nim** : un certain nombre d'allumettes sont arrangées en plusieurs lignes ; chacun leur tour, Alice et Bob retirent des allumettes, au moins une à chaque fois, et autant qu'ils veulent, mais *d'une ligne seulement* ; le gagnant est celui qui retire la dernière allumette (de façon équivalente, le perdant est celui qui ne peut pas jouer). Autrement dit, une position du jeu de nim est une suite finie $(n_1, \ldots, n_r)$ d'entiers naturels (représentant le nombre d'allumettes de chaque ligne), et un coup possible à partir de cette position consiste à aller vers l'état $(n'_1, \ldots, n'_r)$ où $n'_i = n_i$ pour tout i sauf exactement un pour lequel $n'_i < n_i$. Il s'agit ici d'un jeu à deux joueurs impartial à connaissance parfaite (un cas particulier du jeu général défini en 1.3.9). On verra en 6.2 que la théorie de Grundy permet de décrire exactement la stratégie gagnante : en anticipant sur la suite, il s'agit de calculer le XOR (= « ou exclusif », appelé aussi *somme de nim* dans ce contexte des nombres n_i d'allumettes des différentes lignes (écrits en binaire) : ce XOR s'appelle la *fonction de Grundy* de la position, et le jeu est gagnable par le second joueur (c'est-à-dire, celui qui *vient de* jouer) si et seulement cette fonction de Grundy vaut 0. (À titre d'exemple, la position de départ la plus courante du jeu de nim est $(1, 3, 5, 7)$, et comme $\mathtt{001} \oplus \mathtt{011} \oplus \mathtt{101} \oplus \mathtt{111} = \mathtt{000}$ en binaire, en notant $\oplus$ pour le XOR, le second joueur a une stratégie gagnante.)

On peut aussi jouer à la variante « misère » du jeu : celui qui prend la dernière allumette a perdu (cf. le film *L'année dernière à Marienbad*) ; néanmoins, elle se ramène assez facilement à la variante « normale » (où celui qui prend la dernière allumette a gagné), cette dernière ayant plus d'intérêt mathématique.

Le jeu de nim apparaît sous différents déguisements. On peut par exemple évoquer le suivant, complètement équivalent à ce qu'on vient de dire : on place r jetons sur un plateau formé d'une seule ligne dont les cases sont numérotées $0, 1, 2, 3, \ldots$ (de la gauche vers la droite, pour fixer les idées). Chacun tour à tour déplace un jeton vers la gauche ; plusieurs jetons ont le droit de se trouver sur la même case, et ils peuvent passer par-dessus l'un l'autre. Le perdant est celui qui ne peut plus jouer (parce que tous les jetons sont sur la case la plus à gauche, 0). Il s'agit exactement du jeu de nim, en considérant que la position où les jetons sont sur les cases $n_1, \ldots, n_r$ correspond à celle du jeu de nim où il y a $n_1, \ldots, n_r$

Jeu de nim : jeu à information parfaite à deux joueurs. (1.3.10)

État du jeu : "rangées d'allumettes"

Coup possible : retirer autant d'allumettes que souhaité, mais d'une seule ligne.

Gagnant : celui qui retire la dernière allumette ("variante normale")

Le plus souvent, on part de : (1, 3, 5, 7)

```
   |            001
  | | |         011
 | | | | |      101
| | | | | | |   111
                ---
                000
```

$\longrightarrow$ valeur de Grundy (position P)

À chaque position du jeu, on associe une "valeur de Grundy" :

⊕	0	1
0	0	1
1	1	0

* écrire en binaire le nombre d'allumettes de chaque ligne
* effectuer le XOR (qu'on notera ⊕, qu'on appellera "somme de nim") entre ces nombres, ceci donne un nombre (écrit en binaire)

$\longrightarrow$ c'est la valeur de Grundy de la position.

On appellera "position P" resp. "position N" une position où la valeur de Grundy est $= 0$ resp. $\neq 0$.

Stratégie gagnante : jouer de manière à annuler la valeur de Grundy (= jouer vers une position P).
Ceci est possible (exactement) depuis les positions N.

Exemple :

```
   |            001              001        |
  | | |         011              011      | | |
  | | |         011    ---->     011      | | |
| | | | | | |   111              001        |
                ---              ---
                110              000
```

On peut procéder en appliquant par XOR la valeur de Grundy à chacune des lignes jusqu'à en trouver une dont ceci diminue le nombre, et jouer ce coup.

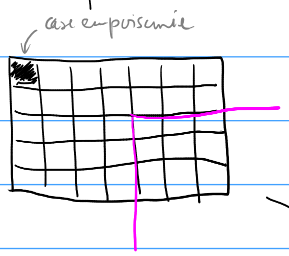
Jeux combinatoires impartiaux à information parfaite

Thm: (3.5.12): il existe toujours une stratégie gagnante pour un joueur.

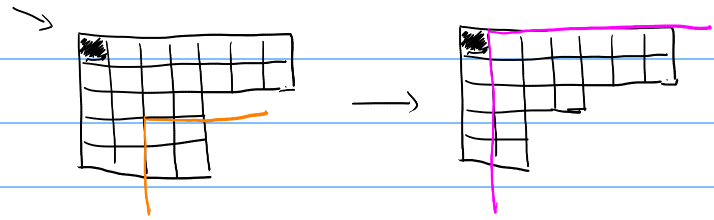
le jeu de nim en est l'archétype.

Il y aura toujours une "valeur de Grundy" définissant une stratégie gagnante (pour un des deux joueurs), exactement comme ci-dessus, mais cette valeur peut être très difficile à calculer.

Jeu de "Chomp" (1.3.12) ou gaufre empoisonnée



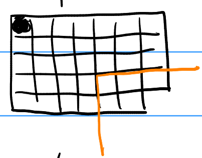
chaque joueur tour à tour va "mordre" dans la gaufre et manger un quadrant



le joueur qui mange la case empoisonnée a perdu.

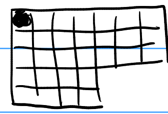
Théorème: (à partir d'une position initiale rectangulaire) le premier joueur possède une stratégie gagnante.

Preuve: supposons par l'absurde que le second joueur ait une stratégie gagnante. Considérons la réponse faite par cette stratégie au coup consistant à manger la seule case en bas à droite:



Ceci conduit donc à une position où le joueur qui vient de jouer a une stratégie gagnante.

Or le premier joueur aurait pu arriver directement à cette position: il a donc une stratégie gagnante consistant à jouer directement vers cette position.



Bref, si le second joueur a une stratégie gagnante, le premier aussi, ce qui est absurde.

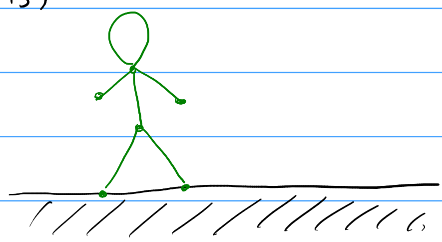
Donc le premier joueur a une stratégie gagnante. □

(Cet argument s'appelle un "vol de stratégie").

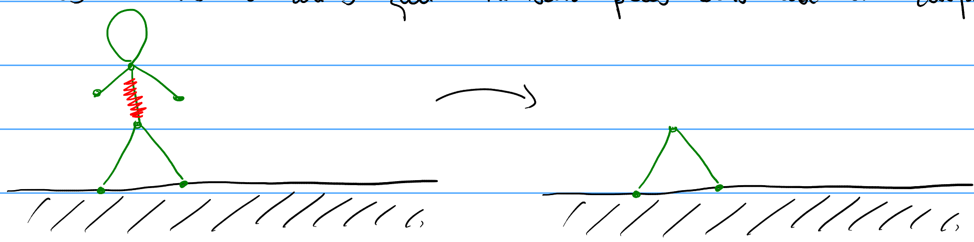
Jeu de Hackenbush. (1.3.13)

(variante impartiale / verte)

Chaque joueur retire une arête du graphe, et



tous les sommets et arêtes qui ne sont plus reliés au sol disparaissent

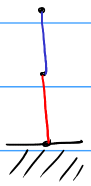


Le perdant est celui qui ne peut plus jouer. (convention générale)

Variante partisane : il y a trois couleurs d'arêtes :

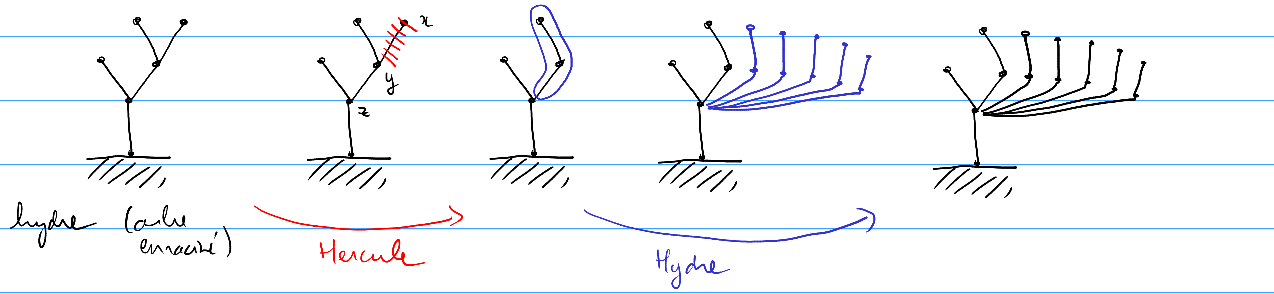
- les vertes, que tout le monde peut retirer,
- les rouges, que seul le joueur rouge peut retirer
- les bleues, que seul le joueur bleu peut retirer.

⇝ jeu "partisan"



(ici, rouge gagne quel que soit le joueur qui commence)

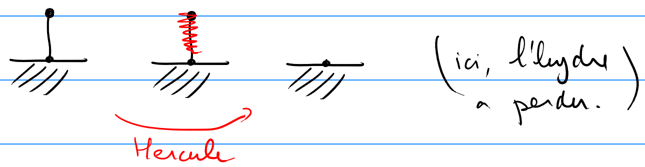
Jeu de l'hydre et Hercule: (1.3.14)



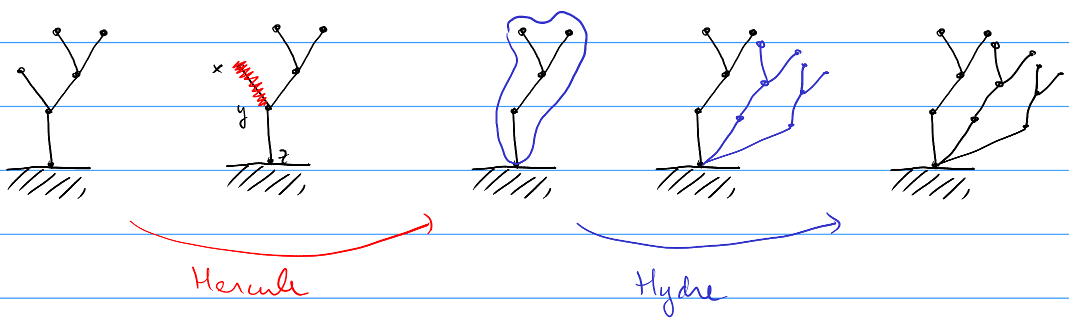
Un coup du jeu par Hercule consiste à choisir une tête x de l'hydre (= feuille de l'arbre) et à l'effacer (ainsi que l'arête qui y mène).

Après quoi l'hydre reproduit autant qu'elle veut d'exemplaires de tout le sous-arbre partant du noeud père y du noeud effacé (x).

<u>NB</u>: si Hercule coupe une tête x directement reliée à la racine, l'hydre ne joue pas



Autre exemple:



Hercule gagne s'il ramène l'hydre à zéro (= sa racine) en temps fini.
L'hydre cherche, elle, à survivre indéfiniment.

<u>Théorème</u>: Hercule gagne <u>toujours</u>, quoi qu'il fasse et quoi que fasse l'hydre.

allumettes sur les différentes lignes. C'est ce point de vue qui suggère le type de jeux suivant :

1.3.11. Jeux de **retournement de pièces**. Ici une position est une rangée de pièces (qui pourront être numérotées, de la gauche vers la droite, de 0 à $N-1$ ou de 1 à N, selon la commodité du jeu), chacune en position « pile vers le haut » (qu'on notera `0`) ou « face vers le haut » (`1`). Chaque joueur tour à tour va retourner certaines pièces selon des règles propres au jeu, avec toujours la règle générale que *au moins une pièce est retournée, et la plus à droite à être retournée doit passer de face à pile* (d'autres pièces peuvent passer de pile à face, et d'autres pièces plus à droite peuvent rester sur pile ou rester sur face, mais la plus à droite parmi les pièces qui se font retourner devait être face avant le mouvement et devient du coup pile). Cette règle générale assure que le nombre binaire formé de l'ensemble des pièces, lues de la droite vers la gauche, diminue strictement à chaque coup, et donc que le jeu termine forcément en temps fini. Le joueur qui ne peut plus jouer a perdu.

Il faut bien sûr mettre des règles supplémentaires restreignant les retournements possibles, sinon le jeu n'a aucun intérêt (le premier joueur met toutes les pièces à montrer pile et gagne immédiatement). Quelques exemples de telles règles peuvent être :

— On ne peut retourner qu'une pièce à chaque coup. Dans ce cas, seul importe le nombre de pièces montrant face, et les joueurs n'ont essentiellement aucun choix dans le coup à jouer : peu importe la pièce retournée (qui passe forcément de face à pile) ; si le nombre de pièces montrant face est pair, le second joueur gagne, tandis que s'il est impair, c'est le premier qui gagne. Ce jeu est très peu intéressant.

— On retourne exactement deux pièces à chaque coup (toujours avec la règle générale que la plus à droite des deux passe de face à pile). Il s'agit de nouveau du jeu de nim déguisé (mais un peu mieux) : si les pièces sont numérotées à partir de 0 (la plus à gauche), retourner les pièces n et $n' < n$ peut se comprendre comme faire passer une ligne d'allumettes de n à n' allumettes, avec la différence que deux lignes identiques disparaissent mais on peut montrer que cette différence n'a aucun impact sur le jeu de nim (essentiellement parce que deux lignes identiques s'« annulent » : si un joueur prend des allumettes de l'une, l'autre peut faire le même coup sur l'autre).

— On retourne *une ou deux* pièces (toujours avec la règle générale que la plus à droite des deux passe de face à pile). Il s'agit encore une fois de nim déguisé, mais cette fois en numérotant les pièces à partir de 1 (retourner une seule pièce revient à vider une ligne de nim, en retourner deux revient à diminuer le nombre de pièces d'une ligne).

— On retourne *au plus trois* pièces (toujours avec la règle générale). On peut décrire la stratégie gagnante dans ce jeu en rapport avec le code de parité binaire. Plus généralement, les jeux où on retourne au plus s pièces peuvent, pour les petites valeurs de s, être reliés à des codes correcteurs remarquables.

— On retourne n'importe quel nombre de pièces, mais elles doivent être consécutives (et toujours avec la règle générale que la pièce retournée la plus à droite passe de face à pile). Il est assez facile de décrire la stratégie gagnante de ce jeu.

On peut aussi considérer des jeux de retournement de pièces bidimensionnels : une position est alors un damier, par exemple avec M lignes et N colonnes (qu'on peut donc repérer comme $\{0, \ldots, M-1\} \times \{0, \ldots, N-1\}$) avec une pièce à chaque case, qui peut montrer pile ou face. Donnons juste un exemple de tel jeu : chaque joueur peut retourner soit une seule pièce, soit exactement deux pièces de la même ligne, soit exactement deux pièces de la même colonne, soit exactement quatre pièces formant les quatre sommets d'un rectangle (i.e., définies par l'intersection de deux lignes et de deux colonnes), avec la contrainte supplémentaire que dans chaque cas la pièce la plus en bas à droite de celles retournées doit passer de face à pile.

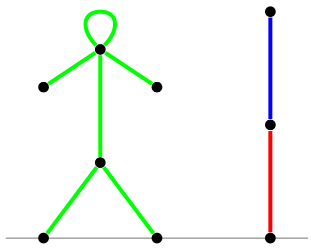
1.3.12. Le jeu de **chomp** ou de la tablette de chocolat (ou gaufre) empoisonnée.

On part d'une « tablette de chocolat » de taille $m \times n$, c'est-à-dire le produit $\{0, \ldots, m-1\} \times \{0, \ldots, n-1\}$ dont les éléments (les couples (i, j) avec $0 \leq i < m$ et $0 \leq j < n$) sont appelés les « carrés » de la tablette ; un état général du jeu sera un sous-ensemble de ce produit (l'ensemble des carrés restant à manger). Le carré $(0, 0)$ est empoisonné et le but est de ne pas le manger. Un coup consiste à choisir un carré (i, j) où mordre dans la tablette, ce qui fait disparaître tous les carrés (i', j') avec $i' \geq i$ et $j' \geq j$. Chaque joueur, tour à tour, effectue un coup de la sorte, et le premier à mordre dans la case empoisonnée $(0, 0)$ a perdu (de façon équivalente, on ne peut pas mordre dedans, ce qui se ramène au formalisme général où le premier qui ne peut pas jouer a perdu).

On ne sait pas décrire la stratégie gagnante en général, mais on peut montrer que, partant d'une tablette rectangulaire (ou carrée) $m \times n$ (par opposition à une forme irrégulière quelconque), le *premier joueur* a forcément une stratégie gagnante. En effet, en admettant provisoirement (cf. 3.4.4) qu'un des deux joueurs a une stratégie gagnante, montrons qu'il s'agit forcément du premier ; pour cela, supposons par l'absurde que le second joueur ait une stratégie gagnante, et considérons la réponse (i, j) préconisée par cette stratégie si le premier joueur joue en mordant la case $(m-1, n-1)$ opposée à la case empoisonnée : à partir de l'état obtenu en jouant cette réponse (i.e., toutes les cases (i', j') avec $i' \geq i$ et $j' \geq j$ ont été mangées), le joueur qui vient de jouer est censé avoir une stratégie gagnante ; mais si le premier joueur jouait directement en mordant en (i, j), il se ramènerait à cet état, les rôles des joueurs étant inversés, donc il aurait une stratégie gagnante, et cela signifie qu'il en a une dès le premier tour.

1.3.13. Le jeu de **Hackenbush** impartial, bicolore, ou tricolore.

Dans ce jeu, l'état est défini par un dessin, plus précisément un graphe non orienté, pouvant avoir des arêtes multiples et des arêtes reliant un sommet à lui-même, dont certains sommets sont « au sol » (graphiquement représentés en les plaçant sur une droite horizontale en bas du dessin). Chaque sommet et chaque arête doit être « relié au sol », c'est-à-dire atteignable depuis un sommet au sol par une succession d'arêtes. De plus, dans le cas de Hackenbush bicolore, chaque arête est coloriée rouge ou bleue, dans le cas de Hackenbush tricolore elle peut aussi être verte, et dans le cas de Hackenbush impartial il n'y a pas de couleur, ou, si on préfère, toutes les arêtes sont vertes.

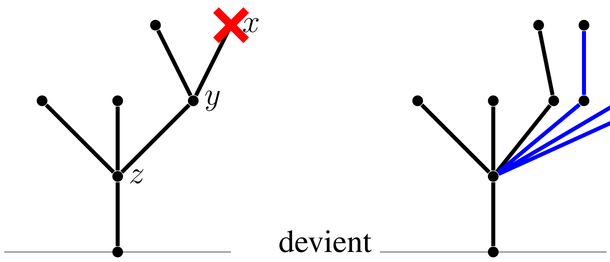


(Un état possible de Hackenbush.)

Alice et Bob jouent tour à tour, chacun efface une arête du dessin, ce qui fait disparaître du même coup toutes les arêtes et tous les sommets qui ne sont plus reliés au sol. (Par exemple, dans le dessin représenté ci-dessus, si on efface l'arête rouge, l'arête bleue au-dessus disparaît immédiatement ; si on efface l'une des deux arêtes vertes reliées au sol, les « jambes » du « bonhomme » vert, rien de particulier ne se passe mais si on efface la deuxième, toutes les arêtes vertes disparaissent.) Dans le jeu de Hackenbush impartial, n'importe quel joueur peut effacer n'importe quelle arête ; dans le jeu bicolore, seule Alice peut effacer les arêtes rouges et seul Bob peut effacer les arêtes bleues ; dans le jeu tricolore, les arêtes vertes sont effaçables par l'un ou l'autre joueur (mais dans tous les cas, la disparition des arêtes non reliées au sol est automatique). Le jeu se termine quand un joueur ne peut plus jouer, auquel cas il a perdu (au Hackenbush impartial, cela signifie que le jeu se termine quand un joueur finit de faire disparaître le dessin, auquel cas il a gagné ; au Hackenbush bicolore ou tricolore, il se peut bien sûr qu'il reste des arêtes de la couleur du joueur qui vient de jouer).

Le jeu de Hackenbush impartial possède une stratégie gagnante soit par le premier soit par le second joueur (le dessin formé uniquement des arêtes vertes ci-dessus, par exemple, est gagnable par le premier joueur, le seul coup gagnant consistant à effacer le « corps » du « bonhomme » pour ne laisser que ses jambes). Le jeu de Hackenbush bicolore possède une stratégie gagnante soit pour Alice, soit pour Bob, soit pour le second joueur, mais jamais pour le premier (le dessin formé par les arêtes rouge et bleue ci-dessus, par exemple, est gagnable par Alice). Le jeu de Hackenbush tricolore possède une stratégie gagnante soit pour Alice, soit pour Bob, soit pour le premier joueur, soit pour le second (l'ensemble du dessin ci-dessus, par exemple, est gagnable par Alice).

1.3.14. Le **jeu de l'hydre** : Hercule essaie de terrasser l'hydre. Le joueur qui joue l'hydre commence par dessiner (i.e., choisir) un arbre (fini, enraciné), la forme initiale de l'hydre. Puis Hercule choisit une *tête* de l'hydre, c'est-à-dire une feuille x de l'arbre, et la décapite en la supprimant de l'arbre. L'hydre se reproduit alors de la façon suivante : soit y le nœud parent de x dans l'arbre, et z le nœud parent de y (grand-parent de x, donc) : si l'un ou l'autre n'existe pas, rien ne se passe (l'hydre passe son tour); sinon, l'hydre choisit un entier naturel n (aussi grand qu'elle veut) et attache à z autant de nouvelles copies de y (mais sans la tête x qui a été décapitée) qu'elle le souhaite. Hercule gagne s'il réussit à décapiter le dernier nœud de l'hydre; l'hydre gagnerait si elle réussissait à survivre indéfiniment.



Ce jeu est particulier en ce que, mathématiquement, non seulement Hercule possède une stratégie gagnante, mais en fait Hercule gagne *toujours*, quoi qu'il fasse et quoi que fasse l'hydre (cf. 5.6). Pourtant, en pratique, l'hydre peut facilement s'arranger pour survivre un temps inimaginablement long.

1.3.15. Le **jeu topologique de Choquet** : soit X un espace métrique (ou topologique) fixé à l'avance. Uriel et Vania choisissent tour à tour un ouvert non vide de (X contenu dans) l'ouvert précédemment choisi : i.e., Uriel choisit $\varnothing \neq U_0 \subseteq X$, puis Vania choisit $\varnothing \neq V_0 \subseteq U_0$, puis Uriel choisit $\varnothing \neq U_1 \subseteq V_0$ et ainsi de suite. Le jeu continue pendant un nombre infini de tours indicés par les entiers naturels. À la fin, on a bien sûr $\bigcap_{n=0}^{\infty} U_n = \bigcap_{n=0}^{\infty} V_n$: on dit qu'Uriel gagne le jeu si cette intersection est vide, Vania le gagne si elle est non-vide. On peut se convaincre que si $X = \mathbb{Q}$, alors Uriel possède une stratégie gagnante, tandis que si $X = \mathbb{R}$ c'est Vania qui en a une.

1.3.16. Les **jeux de Gale-Stewart** (cf. partie 3) : soit A un sous-ensemble de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ ou de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ ou de $[0,1]$. Alice et Bob choisissent tour à tour un élément de $\mathbb{N}$ (dans le premier cas) ou de $\{0,1\}$ (dans les deux suivants). Ils jouent un nombre infini de tours, « à la fin » desquels la suite de leurs coups définit un élément de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$

ou de $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ ou, en les considérant comme la suite des chiffres binaires d'un réel commençant par $0.$, de $[0, 1]$: si cet élément appartient à A, Alice gagne, sinon c'est Bob (la partie n'est jamais nulle). *Il n'est pas vrai* qu'un des deux joueurs possède forcément une stratégie gagnante.

1.3.17. Considérons le jeu suivant : Turing choisit publiquement une machine de Turing (i.e., un programme sur ordinateur) et Blanche (son adversaire) doit répondre soit « elle termine en n étapes » où n est un entier naturel (explicite), soit « elle ne termine pas ». Dans le premier cas, on lance l'exécution de la machine de Turing sur n étapes, et si elle termine bien dans le temps annoncé, Blanche a gagné, sinon c'est Turing qui a gagné. Dans le second cas (i.e., si Blanche a annoncé « elle ne termine pas »), c'est à Turing d'annoncer soit « si, elle termine en m étapes » où m est un entier naturel (explicite), soit « en effet, elle ne termine pas ». Dans le premier sous-cas, on lance l'exécution de la machine de Turing sur m étapes, et si elle termine bien dans le temps annoncé, Turing a gagné, sinon c'est Blanche qui a gagné. Dans le second sous-cas (i.e., si Turing a confirmé « en effet, elle ne termine pas »), Blanche a gagné.

Dit de façon plus simple : Turing propose à Blanche de décider l'arrêt d'une machine de Turing ; si Blanche prédit l'arrêt, elle doit donner le nombre d'étapes et on peut vérifier cette affirmation ; si elle prédit le contraire, c'est à Turing de la contredire le cas échéant par une affirmation d'arrêt, qui sera elle aussi vérifiée.

La règle du jeu peut être implémentée algorithmiquement : i.e., on peut vérifier (sur une machine de Turing !) qui gagne ou qui perd en fonction des coups joués (puisque à chaque fois on fait des vérifications finies). Néanmoins, aucun des joueurs n'a de stratégie gagnante *algorithmique* (i.e., choisissant un coup algorithmiquement en fonction des coups antérieurs). En fait, Turing n'a pas de stratégie gagnante du tout (quelle que soit la machine qu'il choisit au premier coup, Blanche *pourrait* répondre correctement auquel cas Turing ne gagne pas). Mais Blanche n'a pas de stratégie gagnante algorithmique, car cela reviendrait à résoudre le problème de l'arrêt.

Cet exemple illustre le fait qu'on ne peut pas espérer avoir un algorithme qui calcule un coup gagnant dans n'importe quel jeu même si on se limite aux jeux dont le gain est calculable algorithmiquement.

(On peut remplacer le problème de l'arrêt par n'importe quel problème semi-décidable : si $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une fonction algorithmiquement calculable dont l'image n'est pas décidable, Turing choisit un élément y de $\mathbb{N}$, Blanche doit soit répondre « $y = f(n)$ » pour un n explicite soit « y n'est pas dans l'image », auquel cas Turing peut soit rétorquer « si, $y = f(m)$ » soit concéder que y n'est pas dans l'image. Autre exemple : Turing choisit un énoncé mathématique, Blanche doit soit le démontrer soit dire que ce n'est pas un théorème, et dans le second cas c'est à Turing de le démontrer.)

1.4 Remarques

1.4.1. La question suivante mérite l'attention : supposons que, dans un jeu, deux joueurs aient à jouer deux coups successifs, disons que le joueur A choisit une option x parmi un certain ensemble E (typiquement fini), *puis* le joueur B choisit, en connaissant le x choisi par A, une option y parmi un certain ensemble F (typiquement fini). Revient-il au même de demander de choisir *simultanément* pour A un élément de E et pour B un élément de l'ensemble F^E des fonctions de E dans F ? L'idée étant que B choisit la fonction φ qui, selon le coup $x \in E$ joué par A, déterminera le coup $y := \varphi(x) \in F$ qu'il joue en réponse. Au moins si E est fini, on peut imaginer que B considère mentalement tous les coups que A pourra jouer et choisit la réponse qu'il y apporterait, déterminant ainsi la fonction φ (si on préfère, φ est une stratégie locale pour le prochain coup de B).

En principe, les jeux ainsi considérés (le jeu initial, et celui où on a demandé à B d'anticiper son choix en le remplaçant par une fonction du choix de A) devraient être équivalents. En pratique, il se peut qu'on les analyse différemment pour différentes raisons.

Notons que si on permet ou oblige B à communiquer à A la fonction φ qu'il a choisie, i.e., à s'*engager* irrévocablement sur le coup y qu'il jouerait selon le coup x de A, on peut véritablement changer le jeu.

1.5 Plan

La partie 2 concerne les jeux en forme normale et la notion d'équilibre de Nash : on gardera donc à l'esprit les exemples tels que le dilemme du prisonnier (1.3.4), le trouillard (1.3.5) et la bataille des sexes (1.3.6). On évoque plus particulièrement les jeux à somme nulle en 2.3 : on pensera alors à des jeux comme pierre-papier-ciseaux (cf. 1.3.3).

La partie 3 introduit la notion de jeux de Gale-Stewart et prouve un théorème fondamental de détermination (la détermination des jeux *ouverts*).

La partie 4 introduit la notion de graphe bien-fondée et d'induction bien-fondée qui est essentielle pour la suite. La partie 5 introduit la notion d'ordinaux qui permet de généraliser beaucoup de résultats du fini à l'infini.

La partie 6 concerne la théorie, dite « combinatoire », des jeux impartiaux à information parfaite, dont le modèle est décrit en 1.3.9 (sans coloriage) et dont l'archétype est le jeu de nim (cf. 1.3.10) ou le Hackenbush impartial (=vert) (cf. 1.3.13).

On parlera ensuite rapidement dans la partie 7 des jeux *partisans* à information parfaite, dont l'archétype est le Hackenbush bicolore ou tricolore, et de la théorie des nombres surréels de Conway.